

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением президиума Ученого совета
ННГУ
протокол от
«11» мая 2021 г. № 2__

Рабочая программа дисциплины

Методы оптимизации

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

010303 Механика и математическое моделирование

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Математическое моделирование и компьютерный инжиниринг

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2021 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Методы оптимизации относится к обязательной части

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.27, Методы оптимизации относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ОПК-1 Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	ОПК-1.1.: Знает основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук	Знать классические постановки задач конечномерной и бесконечномерной оптимизации, основные численные методы оптимизации, а также аналитические методы решения задач оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности	собеседование
	ОПК-1.2.: Умеет анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук	Уметь самостоятельно и корректно использовать методы формализации практических и естественнонаучных задач в виде задач оптимизации, допускающих такую формализацию, а также применять для их решения численные методы оптимизации и аналитические методы решения задач оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности	задачи
	ОПК-1.3.: Владеет навыками применения фундаментальных разделов механики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач	Владеет навыками использования методов формализации прикладных и естественнонаучных задач, возникающих из потребностей научно-исследовательской деятельности, в виде задач оптимизации, при условии, что они допускают такую формализацию, а также применения для их решения численных методов оптимизации и аналитических методов решения задач оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности	задачи

ОПК-6 Способен к ведению инновационно-исследовательской деятельности			
---	--	--	--

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	108
в том числе	
контактная работа:	65
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	32
- текущий контроль (КСР)	1
самостоятельная работа	43
Промежуточная аттестация – зачет	

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Шестой семестр						
Тема 1. Элементарный выпуклый анализ. Выпуклые множества. Выпуклые конусы. Возможные направления. Выпуклые функции. Критерии выпуклости. Точки минимума выпуклых функций.	18		6		6	13
Тема 2. Гладкие конечномерные задачи на экстремум. Теорема Вейерштрасса и ее следствия. Безусловный минимум; необходимые	27	8	9		17	10

условия минимума первого и второго порядков, достаточные условия. Условный минимум: принцип Лагранжа в задачах с ограничениями типа равенства и неравенства, регулярность, гладко-выпуклые задачи, условия второго порядка.						
Тема 3. Выпуклые конечномерные задачи на экстремум. Различные формы записи задач выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. Теория двойственности. Случай задач линейного программирования.	33	14	9		23	10
Тема 4. Численные методы конечномерной оптимизации. Терминология. Классификация методов. Одномерный поиск для унимодальных и липшицевых функций. Безусловная минимизация функций нескольких переменных: градиентные методы, метод Ньютона, методы сопряженных направлений для квадратичных функций, метод сопряженных градиентов. Условная минимизация функций нескольких переменных: методы штрафных функций, симплекс-метод решения задач линейного программирования.	28	10	8		18	10
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация - зачет						
Итого	108	32	32		65	43

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет, экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Методы оптимизации» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к зачету и экзамену. Самостоятельная работа студентов (выполнение домашних практических заданий, подготовка к коллоквиуму, зачету) обеспечивается доступной студентам основной и дополнительной литературой, а также доступными им интернет-ресурсами (см. ниже раздел 6. **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**).

Для подготовки к зачету по темам 1 - 3, связанным с математическим программированием, студентам можно воспользоваться:

1. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).
2. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
3. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

Указанные пособия содержат теоретический материал с иллюстрирующими подробными примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения.

Для подготовки к зачету по теме 4, связанной с численными методами оптимизации, студентам можно воспользоваться:

1. Сумин В.И. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методическая разработка по курсу "Методы оптимизации". - Горький: Изд-во ГГУ, 1989 (40).
2. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
3. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
4. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (70).

Указанные пособия содержат теоретический материал с иллюстрирующими подробными примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения, а также примеры программ на языке MATLAB и задания для выполнения лабораторных работ.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	от ответа						
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

не за- чтено	Неудовлетворитель- но	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетво- рительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки ре- зультатов обучения

5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетен- ции
1. Определение и простейшие свойства выпуклых множеств.	ОПК-1
2. Граничные точки выпуклых множеств.	ОПК-1
3. Проекция точки на множество. Теоремы о проекции.	ОПК-1
4. Неотрицательная и выпуклая комбинации точек.	ОПК-1
5. Коническая и выпуклая оболочки множества.	ОПК-1
6. Теоремы отделимости выпуклых множеств.	ОПК-1
7. Опорные гиперплоскости.	ОПК-1
8. Сопряженный конус. Теорема Фаркаша.	ОПК-1
9. Возможные (допустимые) направления.	ОПК-1
10. Определение выпуклой функции и его геометрический смысл. Простейшие свойства выпуклых функций.	ОПК-1
11. Дифференцируемость выпуклой функции по возможным направлениям.	ОПК-1
12. Свойство непрерывности выпуклой функции.	ОПК-1
13. Критерии выпуклости в классе дифференцируемых функций нескольких переменных.	ОПК-1
14. Критерий выпуклости в классе дважды дифференцируемых функций многих переменных.	ОПК-1
15. Точки минимума выпуклых функций. Критерий точки мини- мума выпуклой функции.	ОПК-1
16. Сильно выпуклые функции.	ОПК-1
17. Понятие о математической теории оптимизации и матема- тическом программировании (МП) как одном из ее разде- лов. Примеры задач оптимизации.	ОПК-1
18. Теорема Вейерштрасса и ее следствия.	ОПК-1
19. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Необходимые условия первого порядка.	ОПК-1
20. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Необходимые условия второго порядка.	ОПК-1

21. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Достаточные условия второго порядка.	ОПК-1
22. Направления спуска. Необходимое условие оптимальности в общей задаче минимизации. Необходимое и достаточное условия направления спуска для дифференцируемых функций.	ОПК-1
23. Гладкие задачи на условный экстремум. Необходимое условие оптимальности первого порядка.	ОПК-1
24. Гладкие задачи на условный экстремум. Необходимое условие оптимальности в классе дважды дифференцируемых функций.	ОПК-1
25. Гладкие задачи на условный экстремум. Достаточное условие оптимальности в классе дважды дифференцируемых функций	ОПК-1
26. Классификация задач математического программирования.	ОПК-1
27. Принцип Лагранжа и его геометрический смысл.	ОПК-1
28. Достаточное условие глобального минимума в задаче выпуклого программирования.	ОПК-1
29. Простейшее условие регулярности в задаче математического программирования.	ОПК-1
30. Достаточные условия регулярности в задаче математического программирования: условие Слейтера.	ОПК-1
31. Достаточные условия регулярности в задаче математического программирования: условие линейности.	ОПК-1
32. Необходимые условия второго порядка в задаче математического программирования.	ОПК-1
33. Достаточные условия второго порядка в задаче математического программирования	ОПК-1
34. Выпуклое программирование. Теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме.	ОПК-1
35. Понятие седловой точки функции Лагранжа. Критерий седловой точки.	ОПК-1
36. Теорема Куна-Таккера в форме утверждения о седловой точке. Связь с теоремой Куна-Таккера в дифференциальной форме.	ОПК-1
37. Понятие двойственной задачи и ее свойства.	ОПК-1
38. Теорема двойственности.	ОПК-1
39. Теорема Куна-Таккера в форме двойственности.	ОПК-1
40. Теорема существования решения в задачах ЛП.	ОПК-1
41. Теория двойственности для задач ЛП	ОПК-1

42. Классификация численных методов оптимизации.	ОПК-1
43. Метод дихотомии.	ОПК-1
44. Метод половинного деления.	ОПК-1
45. Метод золотого сечения.	ОПК-1
46. Безусловная минимизация функций многих переменных: овражный эффект.	ОПК-1
47. Безусловная минимизация функций многих переменных: метод наискорейшего спуска. Теорема о сходимости.	ОПК-1
48. Безусловная минимизация функций многих переменных: метод Ньютона: идея, алгоритм, достоинства и недостатки, сравнение с градиентными методами.	ОПК-1
49. Условная минимизация функций многих переменных: метод проекции градиента. Теорема о сходимости.	ОПК-1
50. Условная минимизация функций многих переменных: метод условного градиента. Теорема о сходимости.	ОПК-1
51. Условная минимизация функций многих переменных: метод квадратичного штрафа.	ОПК-1
52. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: каноническая задача ЛП. Приведение задач ЛП к каноническому виду.	ОПК-1
53. Основные определения симплекс-метода: вершина, ребро, базис вершины. Соответствие между вершинами и базисами. Ребра, выходящие из невырожденной вершины.	ОПК-1
54. Итерационный алгоритм симплекс-метода в невырожденном случае. Итерационные формулы. Симплекс-таблица (СТ). Анализ и пересчет СТ.	ОПК-1
55. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: отыскание начальной вершины методом искусственного базиса	ОПК-1

5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции

Вариант 1

Задача 1. Проверить на выпуклость функцию $f(x) = (x_1)^2 - x_1x_2 + (x_2)^2$ на множестве $X = R^2$.

Задача 2. Существует ли точка глобального минимума в задаче оптимизации: $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$, $x^2 + y^2 \leq 4$? Почему?

Задача 3. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации: $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

Задача 4. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2x - y + 3z \rightarrow \min \\ x + 3y - 2z \leq 2, & 2x - y + z = 4, \\ y, z \geq 0. \end{cases}$$

Задача 5. Решить задачу $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$ методом Ньютона, начав с точки (1,1).

5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

Вариант 1 (Выпуклый анализ)

Задание 1. Проверить на выпуклость множество $X = \Gamma_{c,\alpha}$.

Задание 2. Проверить на выпуклость функцию $f(x) = 3(x^1)^2 - x^1 x^2 + (x^2)^2$.

Вариант 2 (Общая задача оптимизации)

Задание 1. Для задачи $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min$, $(x^1)^2 + x^2 \leq 1$, $x^2 \geq 0$, построить допустимое множество и линии уровня целевой функции; указать точку глобального минимума (если она существует). Выполняются ли какие-то достаточные условия существования глобального минимума в этой задаче?

Задание 2. Решить задачу безусловной минимизации: $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3 (Гладкие задачи математического программирования)

Задание 1. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации:

$$f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min, (x^1)^2 + x^2 \leq 1, x^2 \geq 0.$$

Задание 2. Решить с помощью теоремы Куна-Таккера в дифференциальной форме задачу оптимизации:

$$f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x^1 + x^2 = 1, x^1, x^2 \geq 0.$$

Вариант 4 (Выпуклое и линейное программирование)

Задание 1. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2y - x + 3z \rightarrow \min \\ 3x + y - 2z \leq 2, & 2y - x + z = 4, \\ x, z \geq 0. \end{cases}$$

Задание 2. Решить ту же задачу с помощью теоремы Куна-Таккера в форме утверждения о седловой точке.

Вариант 5 (Численные методы оптимизации)

Задание 1. Решить задачу $f(x, y) = x^2 + 4y^2 \rightarrow \min$ методом Ньютона, начав с точки $(1, -1)$.

Задание 2. Решить симплекс-методом задачу линейного программирования: $f(x) = (c, x) \rightarrow \min$,

$$Ax = b, x \geq 0, A = \begin{pmatrix} 2, 1, 1, 0 \\ 1, 3, 0, 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c = (1, -2, 2, 3).$$

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988 (215).
2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука. 1984 (160).

б) дополнительная литература:

1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука. 1986 (4).
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983 (14).

в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре прикладной математики для выдачи студентам

1. Сумин В.И. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методическая разработка по курсу "Методы оптимизации". - Горький: Изд-во ГГУ, 1989 (40).
2. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
3. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
4. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (70).

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Фонд электронных изданий ННГУ. Режим доступа:
<http://www.unn.ru/books/resources.html>

1. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).
2. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
3. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ОС 01.03.03 Механика и математическое моделирование

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики
от 2 июня 2021 года, протокол № 8.

Автор (ы) к.ф.-м.н., доц. _____ А.В.Чернов

Рецензент (ы) _____

Заведующий кафедрой _____ М.В. Иванченко