МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

|  |
| --- |
| **Институт информационных технологий, математики и механики**  |

 (факультет / институт / филиал)

|  |
| --- |
| УТВЕРЖДАЮ: |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Директор |  | Гергель В.П. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| « |  | » |  |  | 2017 г. |

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

|  |
| --- |
| **Риманова геометрия** |

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

|  |
| --- |
| **бакалавриат** |

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

|  |
| --- |
| **01.03.01 Математика** |

 (указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

|  |
| --- |
| **Математика (Общий профиль)** |

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)

|  |
| --- |
| **Бакалавр** |

(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения

|  |
| --- |
| **очная** |

 (очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2017

**1.Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ОПОП.** Дисциплина «Риманова геометрия» относится к вариативной части ОПОП по направлению «Математика», является дисциплиной по выбору, изучается в шестом семестре бакалавриата (код дисциплины Б1.В.ДВ.03.02).

**Целью освоения дисциплины (модуля)** «Риманова геометрия» является формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по основным разделам теории гладких многообразий и римановой геометрии, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

**2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю),** соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

|  |  |
| --- | --- |
| **Формируемые компетенции**(код компетенции, уровень освоения – при наличии в карте компетенции) | **Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций** |
| *ОПК-1****готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности****Базовый уровень* | *У1 (ОПК-1)* ***Уметь*** четко формулировать теоремы, решать теоретические и вычислительные задачи, обнаруживать связи со смежными темами из других разделов математики.*З1 (ОПК-1)* ***Знать*** основные понятия, проблемы, методы и результаты римановой геометрии, области их применения *В1 (ОПК-1)* ***Владеть*** навыками решения задач по курсу римановой геометрии, опытом их применения. |
| *ПК-3****способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата****Базовый уровень* | *У1 (ПК-3)* ***Уметь*** доказывать теоремы, формулировать результаты решения задач, обосновывать решения, обнаружить их следствия, связи с ранее решенными задачами и возможные обобщения*З1 (ПК-3)* ***Знать*** терминологию, аппарат и методы математических доказательств, используемые в римановой геометрии*В1 (ПК-3)* ***Владеть*** навыками строгих математических доказательств при решении теоретических задач |

**3. Структура и содержание дисциплины (модуля)** «Риманова геометрия»

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетные единицы, всего 108 ч., из которых 32 ч. составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (30 ч. занятий лекционного типа, 2 часа промежуточной аттестации), 76 ч. составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. 36 часов подготовки к экзамену).

**Содержание дисциплины (модуля)** *(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *№**п/п* | *Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)* | *Семестр* | *Часов* |
| *Всего* | *В том числе* |
| *Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**из них* | *Самостоятельная работа обучающегося* |
| *Занятия лекционного типа* | *Занятия семинарского типа* | *Занятия лабораторного типа* |  | *Всего* |  |
| *Очная* | *Очная* | *Очная* | *Очная* |  | *Очная* |  |
| 1. | **Гладкие многообразия.** Карты, атласы, гладкие структуры. Гладкие отображения многообразий. Касательные векторы и касательные пространства, голономный базис. Дифференциал гладкого отображения. Регулярные и критические точки. Подмногообразия гладкого многообразия. Прямые произведения гладких многообразий. Гладкие расслоения. Группы Ли. Ориентирующие атласы и ориентации. Теорема о числе ориентаций. | 6 | 24 | 6 |  |  |  | 6 | 18 |
| 2 | **Тензорные расслоения и тензорные поля.** Преобразования голономных базисов и координат векторов при замене карт. Кокасательное пространство и его базис. Касательное и кокасательное расслоения. Векторные поля на многообразиях и их гладкость. Скобки Ли векторных полей. Алгебры Ли. Тензоры и операции над ними. Преобразования компонент тензоров при замене карт. Построение тензорных расслоений. Тензорные поля и их гладкость. Симметричные и кососимметричные формы. | 6 | 22 | 8 |  |  |  | 8 | 14 |
| 3. | **Аффинные связности и римановы многообразия.**Римановы метрики и римановы многообразия.Аффинные связности. Коэффициенты аффинной связности. Тензор кручения и его компоненты. Тензор кривизны. Ковариантное дифференцирование полилинейных форм. Связности Леви-Чивита риманова многообразия, теорема существования и единственности. Векторные поля вдоль гладкой кривой на многообразии. Ковариантное дифференцирование векторных полей вдоль кривой. Параллельные векторные поля. Параллельный перенос. Группы голономии аффинной связности. Локально евклидовы римановы многообразия, их критерии.  | 6 | 38 | 10 |  |  |  | 10 | 28 |
| 4. | **Введение в теорию геодезических.**Геодезические на римановых многообразиях. Экспоненциальное отображение. Нормальные окрестности и окрестности Уайтхеда. Локальная минимальность геодезических. Внутренняя метрика. Геодезическая и метрическая полнота. Теорема Хопфа-Ринова. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. |  | 22 | 6 |  |  |  | 6 | 16 |
|  | **В т.ч. текущий контроль** | 6 | 2 |  |  |  |  |  |  |
|  | **Промежуточная аттестация: экзамен** |

Текущий контроль успеваемости проходит в рамках групповых или индивидуальных консультаций. Промежуточный контроль осуществляется на экзамене.

**4. Образовательные технологии.**

Используются образовательные технологии в форме лекций.

Лекционные занятия в основном проводятся в форме лекции-информации. Они ориентированы на изложение и объяснение студентам научной информации, подлежащей осмыслению (на самой лекции и в ходе самостоятельной работы) и запоминанию. Также предполагается разбор большого числа примеров и задач с вовлечением в процесс студентов.

**5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

**5.1. Виды самостоятельной работы студентов**

* Выполнение домашних практических заданий.
* Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

**5.2. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов**

Учебники, учебные пособия:

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1. - М.: Наука. - 1981. - 344 с. (42 экз.)
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука. – 1979, 1986. - 759 с. (86 экз.)

**6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю**)

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

*ОПК-1****готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности***

|  |  |
| --- | --- |
| Индикаторыкомпетенции | Критерии оценивания (дескрипторы) |
| плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
| Знания*Знать* основные понятия, проблемы, методы и результаты римановой геометрии, области их применения  | полное отсутствие знаний материала | наличие грубых ошибок в основном материале  | знание основного материала с рядом негрубых ошибок | знание основного материалом с рядом заметных погрешностей | знание основного материала с незначительными погрешностями | знание основного материала без ошибок и погрешностей | знание основного и дополнительным материала без ошибок и погрешностей |
| Умения*Уметь* четко формулировать теоремы, решать теоретические и вычислительные задачи, обнаруживать связи со смежными темами из других разделов математики | полное отсутствие умений | грубые ошибки при формулировке теорем и решении задач | умение формулировать теоремы и решать вычислительные задачис рядом негрубых ошибок | умение формулировать теоремы и решать вычислительные задачипри наличии заметных погрешностей | умение формулировать теоремы и решать вычислительные и теоретические задачипри наличии несущественных погрешностей | умение четко формулировать теоремы и решать теоретические и вычислительные задачибез ошибок и погрешностей  | умение четко формулировать теоремы и решать теоретические и вычислительные задачи без погрешностей, обнаруживать связи со смежными темами из других разделов математики |
| Навыки*Владеть* навыками решения задач по курсу римановойгеометрии, опытом их применения  | полное отсутствие навыков  | отсутствие навыковрешения большинства типов задач | наличие навыков решения только части вычислительных задач  | наличие навыков решения большинства вычислительных задач  | наличие навыков решения большинства вычислительных и части теоретических задач  | владение навыкамрешения всех вычислительных и большинства теоретических задач  | владение навыкамрешения всех вычислительных и теоретических задач, наличие опыта их применения в смежных областях  |
| Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий | 0 – 10 % | 11 – 30 % | 31 – 50 % | 51-70 % | 71 – 85 % | 86 – 99 % | 100% |

*ПК-3****способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата***

|  |  |
| --- | --- |
| Индикаторыкомпетенции | Критерии оценивания (дескрипторы) |
| плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
| Знания*Знать* терминологию, аппарат и методы математических доказательств, используемые в римановой геометрии | полное отсутствие знаний  | наличие грубых ошибок в основном материале  | знание основного материала с рядом негрубых ошибок | знание основного материалом с рядом заметных погрешностей | знание основного материала с незначительными погрешностями | знание основного материала без ошибок и погрешностей | знание основного и дополнительным материала без ошибок и погрешностей |
| Умения*Уметь* доказывать теоремы, формулировать результаты решения задач, обосновывать решения, обнаруживать их следствия, связи с ранее решенными задачами и возможные обобщения | полное отсутствие умений | грубые ошибки при формулировке результатов решения задач, полное неумение обосновывать решения | умение формулировать результаты решения задач и обосновывать их с негрубыми ошибками | умение формулировать результаты решения задач и обосновывать их с заметными погрешностями | умение формулировать результаты решения задач и обосновывать их при наличии несущественных погрешностей | умение четко формулировать результаты решения задач и обосновывать их без погрешностей, обнаруживать их следствия, связи с ранее решенными задачами | умение четко формулировать результаты решения задач и обосновывать их без погрешностей, обнаруживать их следствия, связи с ранее решенными задачамии возможные обобщения |
| НавыкиВладеть навыками строгих математических доказательств при решении теоретических задач | полное отсутствие навыков  | отсутствие навыковобоснованиярешения большинства типов задач | наличие навыков обоснованиярешения только части задач с негрубыми ошибками | наличие навыковобоснованиярешения большинства задач с существенными погрешностями | наличие навыковобоснованиярешения большинства задач с несущественными погрешностями  | владение навыкамиобоснованиярешения всех теоретических задач с несущественными погрешностями  | владение навыкамиобоснованиярешения всех теоретических задач без погрешностей  |
| Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий | 0 – 10 % | 11 – 30 % | 31 – 50 % | 51-70 % | 71 – 85 % | 86 – 99 % | 100% |

6.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Промежуточный контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде экзамена, на котором определяется:

* уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
* уровень понимания студентами изученного материала
* способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Экзамен включает устную и письменную часть. Устная часть экзамена заключается в ответе студентом на теоретические вопроса курса (с предварительной подготовкой) и последующем собеседовании в рамках тематики курса. Практическая часть экзамена предусматривает решение задач.

Экзамен в 6 семестре

|  |  |
| --- | --- |
| Превосходно | свободное владение основным материалом и владение дополнительным материалом с незначительными ошибками и погрешностями |
| Отлично | свободное владение основным материалом |
| Очень хорошо | достаточное владение основным материалом с незначительными погрешностями |
| Хорошо | владение основным материалом с рядом заметных погрешностей |
| Удовлетворительно | владение минимальным материалом, необходимым по данному предмету, с рядом ошибок |
| Неудовлетворительно | владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка |
| Плохо | отсутствие владения материалом |

Оценки «превосходно», «отлично», «очень хорошо», «хорошо», «удовлетворительно» считаются положительными.

**6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих сформированность компетенций**

Дисциплина формирует базовый уровень компетенций ОПК-1 и ПК-3.

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- собеседование.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания, включающих одну или несколько задач (вопросов)

**Для проведения промежуточного контроля сформированности компетенции используются**: устный опрос, решение практических задач.

**6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.**

**6.4.1. Примеры вопросов к экзамену по дисциплине** *«Риманова геометрия»*

|  |  |
| --- | --- |
| Вопрос | Код компетенции |
| Дифференциал гладкого отображения и его координатное представление.  | ОПК-1 |
| Построение касательного и кокасательного расслоений. | ПК3 |
| Аффинные связности и формула для вычисления их коэффициентов. | ОПК-1 |
| Теорема существования и единственности связности Леви-Чивита заданного риманова многообразия. | ПК-3 |

**6.4.2. Типовые задания для текущего контроля успеваемости**

**Задачи для быстрой проверки компетенции ОПК-1**

Почему гладкое многообразие $M=\{\left(x,y\right)\in R^{2}∨y=x^{2}\}$ ориентируемо?

Пусть на $M=\left\{0<y<1\right\}$ задана риманова метрика $g=dx⨂dx+2dy⨂dy$. Будет ли риманово многообразие $\left(M,g\right)$ полным?

**Задачи для более глубокой оценки компетенции ОПК-1**

Описать касательные пространства в единице к группам $O\left(n\right)$ и $SL\left(n,R\right)$.

Пусть векторные поля $X,Y$ на многообразии $M=R^{2}$ имеют вид $X\left(x,y\right)=x∂\_{1}+y∂\_{2}$, $Y\left(x,y\right)=y∂\_{1}−x∂\_{2}$ в карте $\left(M,id\right)$. Вычислить скобку Ли $\left[X,Y\right]$. Объяснить полученный результат, опираясь на геометрический смысл скобки Ли.

**Задачи для быстрой проверки компетенции ПК-3**

Доказать, что $M=\{\left(x,y\right)\in R^{2}∨y=x∨\}$ – гладкое многообразие размерности 1.

Пусть $H$ – гладкое векторное поле на $R^{2}$. Доказать, что формула $S\left(X\right)=\left(H,X\right)$ определяет гладкое тензорное поле $S$ типа (1,0) на $R^{2}$.

**Задачи для более глубокой оценки компетенции ПК-3**

Доказать, что отображение $f:SO\left(2\right)\rightarrow SO\left(2\right)$, определенное формулой$f\left(A\right)=A^{−1}$, дифференцируемо. Есть ли у него критические точки?

Для точек $A\in M=SL\left(2,R\right)$ и касательных векторов $B,C\in T\_{A}M$ положим $g\left(B,C\right)=trace\left(BC^{T}\right)$. Доказать, что $g$ – риманова метрика на$M$.

**6.4.3. Примеры заданий (оценочных средств), выносимых на экзамен**

**Задачи для оценки компетенции ОПК-1**

Построить карту на $M=O\left(2\right)$, содержащую единичную матрицу $E$, и найти голономный базис касательного пространства $T\_{E}M$ в этой карте.

Пусть $M=\{\left(x,y\right)\in R^{2}∨y>0\}$ и $g=y\left(dx⨂dx+dy⨂dy\right)$. Написать уравнениягеодезических в римановом многообразии $\left(M,g\right)$..

**Задачи для оценки компетенции ПК-3**

Показать, что поверхность $M=\{\left(x,y,z\right)\in R^{3}∨x^{2}+y^{2}−z^{2}=0,z\geq 0\}$ является двумерным гладким многообразием. Будет ли оно подмногообразием пространства $R^{3}$?

Для $a\in M=R^{3}$и $X,Y\in T\_{a}M$ положим $S\_{a}\left(X,Y\right)=\left[X,Y\right]$. Доказать, что $S:a\rightarrow S\_{a}$ – гладкое тензорное поле типа (2,1).

**6.4.4. Примеры билетов для экзамена**

ННГУ им. Н.И. Лобачевского Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики

## Дисциплина – Риманова геометрия

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

Тензоры и алгебраические операции над ними.

Пусть отображение $f:U\left(1\right)\rightarrow U\left(1\right)$, определено формулой $f\left(z\right)=z^{4}$. Доказать, что оно дифференцируемо и регулярно.

# Зав. кафедрой Экзаменатор

ННГУ им. Н.И. Лобачевского Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики

## Дисциплина – Риманова геометрия

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

Параллельный перенос векторов вдоль кривой и его свойства.

Какие матрицы образуют касательное пространство к многообразию $U\left(n\right)$ в точке$E$, где $E$ – единичная матрица?

Зав. кафедрой Экзаменатор

**6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.**

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014.

<http://www.unn.ru/site/images/docs/obrazov-org/Formi_stroki_kontrolya_13.02.2014.pdf>

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

**7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

**а) основная литература:**

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1. - М.: Наука. - 1981. - 344 с. (42 экз.)
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука. – 1979, 1986. - 759 с. (86 экз.)

**б) дополнительная литература:**

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука. – 1967. – 664 с.; М.: Изд-во УРСС. – 2003 - 759 с. (86 экз.)
2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ. – 1980. - 439 с. (101 экз.)

**в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

[http://www.unn.ru/e-library/](http://window.edu.ru/window_catalog/redir?id=72185)

http://www.unn.ru/books/resources.html

**8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного
типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных
консультаций, текущего контроля, промежуточной аттестации, а также
помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой
с возможностью подключения к сети «Интернет».

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ПрООП ВО по направлению 01.03.01 «Математика».

Автор д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е.И. Яковлев

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Зав кафедрой, д.ф.м.н., проф. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ М.И. Кузнецов

Программа одобрена на заседании методической комиссии института Информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского от \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ г., протокол № \_\_\_\_\_\_\_\_.