

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Физический  
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

И.о. декана  
физического факультета \_\_\_\_\_

Малышев А.И.

« 7 » июня 2018г.

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

Векторный и тензорный анализ

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

бакалавриат

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

03.03.02 «Физика»

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Физика конденсированного состояния

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)

бакалавр

(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения

очно-заочная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2018

год набора 2018

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» относится к базовой части Б1.Б.06.06 блока Б1.Б.06 «Математика», является обязательной для освоения, преподается на втором году обучения, в четвертом семестре. Освоению дисциплины предшествует освоение дисциплин (модулей) «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра».

**Целями** освоения дисциплины «Векторный и тензорный анализ» являются:

- овладение методами тензорной алгебры и подготовка студентов к изучению разделов теоретической физики и ряда специальных дисциплин, таких как теория упругости, кристаллография;
- освоение студентами специфики математического аппарата алгебры тензоров, операций с основными дифференциальными операторами и их комбинациями, а также ознакомление с физическими примерами тензорных величин;
- выработка у студентов практических навыков действий над тензорными величинами, преобразований систем координат, использования интегральных теорем векторного анализа.

## 2. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 2 зачетные единицы, всего 72 часа, из которых 33 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (16 часов занятия лекционного типа, 16 часов занятия семинарского типа (практические занятия), в том числе 2 часа - мероприятия текущего контроля успеваемости, 1 час - мероприятия промежуточной аттестации), 39 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

### Содержание дисциплины «Векторный и тензорный анализ»

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
	Очно-заочное	Очно-заочное	Очно-заочное	Очно-заочное	Очно-заочное	Очно-заочное
<b>1. Векторная алгебра.</b> Понятие линейного (векторного) пространства. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Декартова систем координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат. Матрица поворота и ее свойства.	10	2	2		4	6
<b>2. Тензорная алгебра.</b> Определение тензора. Ранг тензора. Сложение, умножение тензоров. Свертка. Скалярное	10	2	2		4	6

умножение тензоров. Теорема деления.						
<b>3. Приложения теории тензоров.</b> Симметрия тензоров. Инвариантность тензорных соотношений. Тензор поляризации, тензор механических напряжений, тензор инерции. Главные оси и главные значения тензора. Тензорная поверхность. Инварианты тензоров второго ранга. Изотропные тензоры. Тензор Леви-Чивита. Векторное, двойное векторное и смешанное произведения в тензорной форме.	16	4	4		8	8
<b>4. Тензорные поля.</b> Градиент, ротор и дивергенция. Понятия потенциального и вихревого полей. Дифференциальные операции 2-го порядка, оператор Лапласа. Интегральные теоремы векторного анализа. Векторные тождества.	15	4	4		8	7
<b>5. Криволинейные системы координат.</b> Криволинейные системы координат, сферические и цилиндрические координаты. Коэффициенты Ламе. Метрический тензор. Якобиан. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.	10	2	2		4	6
<b>6. Преобразования компонент векторов при инверсии системы координат.</b> Инверсия декартовой системы координат. Правая и левая тройки базисных векторов. Полярный и аксиальный векторы. Скаляры и псевдоскаляры.	10	2	2		4	6
В т.ч. текущий контроль	2		2		2	
Промежуточная аттестация - <b>Зачет</b>						

### 3. Образовательные технологии

- 1) Чтение лекций;
- 2) сопровождение лекций написанием и выводом формул, построением графиков, изображением рисунков на доске;
- 3) методика «вопросы и ответы»;
- 4) выполнение практического задания у доски;
- 5) индивидуальная работа над практическим заданием;
- 6) работа в парах над практическим заданием;
- 7) работа в малых группах над практическим заданием;
- 8) методика «мозговой штурм».

### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся предполагает изучение конспектов лекций, выделенных разделов основной литературы, а также дополнительной литературы, выполнение практических заданий, отвечающих изучаемым разделам дисциплины.

Перечень основной и дополнительной литературы для самостоятельного изучения приведен в п. 7 настоящей Рабочей программы дисциплины.

Контрольные вопросы для промежуточной аттестации, примеры практических заданий приведены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины.

## 5. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-2 способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	(ОПК-2) <b>Знать</b> основные теоретические положения векторного и тензорного анализа. (ОПК-2) <b>Уметь</b> решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания основ векторного и тензорного анализа. (ОПК-2) <b>Владеть</b> навыками расчётов с использованием основ векторного и тензорного анализа.

## 6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

### 6.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Промежуточной аттестацией для дисциплины «Векторный и тензорный анализ» является **зачет**.

По итогам зачета выставляется оценка «Зачтено» или «Не зачтено». Оценка «Не зачтено» означает отсутствие аттестации, оценка «Зачтено» выставляется при успешном прохождении аттестации.

### 6.2. Процедуры и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- индивидуальное собеседование (промежуточная аттестация).

Контрольные вопросы для индивидуального собеседования представлены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и навыков используются следующие процедуры и технологии:

- выполнение практических заданий (текущий контроль, промежуточная аттестация).

Примеры практических заданий для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации представлены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины.

Критериями оценивания являются полнота знаний, наличие умений и владений (навыков), перечисленных в п. 5 настоящей Рабочей программы дисциплины.

**«Не зачтено»** – обучающийся не продемонстрировал представления об основных теоретических разделах курса, не показал минимально допустимый уровень умений и навыков выполнения практических заданий;

**«Зачтено»** – обучающийся продемонстрировал изложение формулировок основных теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения практических заданий базового уровня сложности.

### 6.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

6.3.1. При проведении промежуточной аттестации обучающимся предлагаются следующие контрольные вопросы, охватывающие программу дисциплины «Векторный и тензорный анализ»:

1. Линейная зависимость векторов.
2. Базис в векторном пространстве. Декартова система координат.
3. Преобразование компонент вектора при повороте системы координат.
4. Операции над тензорными величинами.
5. Теорема деления.
6. Симметрия тензоров. Симметричная и антисимметричная составляющие тензора второго ранга.
7. Приведение симметричного тензора второго ранга к диагональному виду.
8. Тензорная поверхность.
9. Изотропные тензоры.
10. Оператор «набла» (примеры использования).
11. Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламэ.
12. Криволинейные координаты. Якобиан.
13. Полярные и аксиальные векторы.
14. Тензор инерции твердого тела.

6.3.2. Примеры практических заданий для практических занятий, самостоятельной работы обучающихся, проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

1. Дан вектор  $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$ , где  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  – взаимно перпендикулярные векторы, причем  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  и  $|\vec{c}| = 3$ . Найти углы между вектором  $\vec{p}$  и а) векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ; б) векторами  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $-(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ .
2. При каком значении  $t$  векторы  $\vec{a} = \{3, 6, 9\}$ ,  $\vec{b} = \{2, 5, 8\}$ ,  $\vec{c} = \{4, 7, t\}$  компланарны?
3. Параллелепипед построен на некопланарных векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Найти площади его диагональных сечений и объем.
4. Компоненты двух векторов заданы в различных системах координат следующим образом: при повороте системы координат  $K$  вокруг оси  $Oy$  на  $30^\circ$   $\vec{a}' = \{1, 1, \sqrt{3}\}$ , а при повороте  $K$  вокруг оси  $Oz$  на  $45^\circ$   $\vec{b}'' = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$ . Найти скалярное произведение этих векторов.
5. Доказать, что произведение  $\delta_{ij} A_j B_n C_n$  является вектором, если  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{C}$  – векторы.
6. В некоторой декартовой системе координат имеет место соотношение  $T_{nkm} = A_{mi} R_{ink}$ . Доказать, что  $A_{mi}$  – тензор II-го ранга, если  $T_{nkm}$  и  $R_{ink}$  – тензоры III-го ранга.
7. В некоторой системе координат известны компоненты двух векторов –  $\vec{A} = \{1, 2, -1\}$  и  $\vec{B} = \{2, 3, -4\}$ . Найти матрицу тензора  $T_{ij} = A_i B_j - \varepsilon_{ijk} A_k$  и вычислить его след.
8. Пусть вектор  $\vec{A}$  имеет компоненты  $\{1, 2, 3\}$ . Найти следующую свертку:  $\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{klm} A_m$ .

9. Материал, характеризуемый тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ помещен в однородное электрическое поле с напряженностью}$$

$\vec{E}$ . Найти тензор диэлектрической восприимчивости  $\alpha_{ij}$  диэлектрика ( $4\pi\alpha_{ik} = \varepsilon_{ik} - \delta_{ik}$ ). Найти вектор поляризации диэлектрика  $\vec{P}$  и вектор электрической индукции  $\vec{D}$  ( $P_i = \alpha_{ik} E_k$ ,  $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ ). Найти углы, которые векторы  $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  образуют друг с другом, а также указать направления, для которых векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  коллинеарны:

$$\text{а). } \vec{E} = E_0 \{2, 1, -2\}; \quad \text{б). } \vec{E} = E_0 \{-2, 2, 1\}.$$

10. В некоторой системе координат известны компоненты тензора II-го ранга:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Разложить его на симметричную } S_{ij} \text{ и } A_{ij} \text{ антисимметричную}$$

составляющие. Найти  $Sp(S_{in} A_{nj})$ .

11. Найти градиент скалярной функции  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \text{а). } \varphi &= \frac{e^{(\vec{a} \cdot \vec{r})}}{r}; & \text{в). } \varphi &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})^3}{r^2}; & \text{д). } \varphi &= \frac{\sin r}{r}; \\ \text{б). } \varphi &= r^3 (\vec{c} \cdot \vec{r}); & \text{г). } \varphi &= ((\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \sin(\vec{b} \cdot \vec{r})); & \text{е). } \varphi &= (\vec{r} \cdot [\vec{a} r \times \vec{b}]). \end{aligned}$$

12. Найти дивергенцию и ротор векторного поля  $\vec{A}$ :

$$\begin{aligned} \text{а). } \vec{A} &= [\vec{a} \times \vec{r}]; & \text{д). } \vec{A} &= \frac{[\vec{a} \times \vec{r}]}{r^3}; & \text{з). } \vec{A} &= \left[ \frac{\vec{a}}{r} \times \vec{r} \right]; \\ \text{б). } \vec{A} &= \vec{c} \exp(\vec{k} \cdot \vec{r}); & \text{е). } \vec{A} &= [\vec{a} \times \vec{r}] \cdot \sin r; & \text{и). } \vec{A} &= \frac{\vec{r}}{r} e^{(\vec{c} \cdot \vec{r})}; \end{aligned}$$

$$13. \text{ Доказать тождество: } \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + [\vec{B} \times \text{rot } \vec{A}] + [\vec{A} \times \text{rot } \vec{B}].$$

#### 6.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

1. Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 №55-ОД.

2. Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

1. Г.М. Максимова, А.И. Малышев, И.Л. Максимов, Сборник контрольных заданий по курсу векторного и тензорного анализа: учебное пособие, Н.Новгород, изд-во ННГУ, 2002, 33 с. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=58187>
2. В.М. Соколов, Н.Г. Голубева, Г.М. Максимова, Сборник задач по основам векторного и тензорного анализа, Горький, изд-во ГГУ, 1976, 44 с. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=95182>
3. Батыгин, В.В. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/544>.

### б) дополнительная литература:

1. А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, М., Высшая школа, 1966, 252 с. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=94886&DB=1>
2. Н.Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., Наука, 1965, 426 с. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=94925>
3. Ю.А. Амензаде, Теория упругости, М., Высшая школа, 1976, 272 с. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=80743&DB=1>
4. В.Г. Левич, Курс теоретической физики, М., Наука, 1969, 910 с. <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=72316>
5. Будак, Б.М. Кратные интегралы и ряды [Электронный ресурс] : учеб. / Б.М. Будак, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2002. — 549 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2123>.

### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Интернет-ресурсы Фундаментальной библиотеки ННГУ <http://www.lib.unn.ru/>.

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием учебных аудиторий для проведения занятий, оборудованных специализированной мебелью, меловыми или магнитно-маркерными досками для представления учебной информации большой аудитории. Ресурс мела и маркеров для доски в учебных аудиториях регулярно возобновляется.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (на базе Фундаментальной библиотеки ННГУ) оснащены компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 03.03.02 – «Физика».

Автор (ы)	_____	к.ф.-м.н. Тележников А.В.
Рецензент (ы)	_____	
И.О. Зав. кафедрой теоретической физики	_____	д.ф.-м.н. профессор Бурдов В.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии  
физического факультета  
от « 7 » июня 2018 г., протокол № б/н

Председатель  
учебно-методической комиссии  
физического факультета ННГУ \_\_\_\_\_