

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДАЮ

Директор института ИТММ

\_\_\_\_\_ В.П. Гергель

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**Рабочая программа дисциплины**

Группы и алгебры Ли

---

Уровень высшего образования  
бакалавриат

---

Направление подготовки  
02.03.01 – Математика и компьютерные науки

---

Направленность образовательной программы  
Общий профиль

---

Квалификация (степень)  
бакалавр

---

Форма обучения  
очная

---

Нижний Новгород

2017

**Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ОПОП.** Дисциплина «Группы и алгебры Ли» относится к вариативной части блока 1 «Дисциплины (модули)» ОПОП ВО бакалавриата (Б1.В.ДВ.05.01), является дисциплиной по выбору, изучается в 7 семестре на 4 году обучения. Трудоемкость составляет 2 зачетных единицы.

**1. Целями освоения дисциплины** являются формирование у студентов общепрофессиональных (ОПК) и профессиональных (ПК) компетенций в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.01. – Математика и компьютерные науки. Содержание дисциплины направлено на освоение фундаментальных понятий и результатов теории групп Ли и алгебр Ли

**2. Планируемые результаты обучения по дисциплине,** соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

<i>Формируемые компетенции</i> (код компетенции, уровень освоения – при наличии в карте компетенции)	<i>Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций</i>
<p>ОПК-1 Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности (<i>заключительный этап</i>)</p>	<p><i>З1 (ОПК-1) знания:</i> знания основных понятий и результатов теории групп Ли и алгебр Ли. <i>У1 (ОПК-1) умения и навыки:</i> умения решать основные задачи теории групп и алгебр Ли. <i>В1 (ОПК-1) владение:</i> владение основными вычислительными алгоритмами теории групп и алгебр Ли.</p>
<p>ПК-1 Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области (<i>заключительный этап</i>)</p>	<p><i>З1 (ПК-1) знания:</i> знания принципов определения общих форм и закономерностей теории групп Ли и алгебр Ли. <i>У1 (ПК-1) умения и навыки:</i> умения определять общие формы и закономерности в теории групп и алгебр Ли. <i>В1 (ПК-1) владение:</i> владение опытом определения общих форм и закономерностей теории групп и алгебр Ли.</p>

### 3. Структура и содержание дисциплины «Группы и алгебры Ли»

Объем дисциплины составляет 2 зачетных единиц, всего 72 часа, из которых 33 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (16 часов занятия лекционного типа, 16 часов практические занятия, 1 час мероприятия промежуточной аттестации), 39 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

#### Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),	Часов	
		в	в том числе

форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						Самостоятельная работа обучающегося
	Очная	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	лабораторного	Консультации	Всего	
		Очная	Очная				
1. <b>Многообразия.</b> Определение, примеры, гладкие отображения, касательное пространство, дифференциал гладкого отображения. Векторные поля, Коммутатор векторных полей. Подмногообразия. Распределения и интегральные многообразия. Теорема Фробениуса. Ф-связанные поля.	16	4	4			8	8
2. <b>Группы Ли.</b> Примеры групп Ли. Гомоморфизмы. Подгруппы Ли. Действие группы Ли на многообразии. Левоинвариантные векторные поля. Алгебра Ли группы Ли. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты. Связные абелевы группы Ли. Замкнутые подгруппы групп Ли. Присоединенное представление.	16	4	4			8	8
3. <b>Алгебры Ли.</b> Примеры алгебр Ли, подалгебры, идеалы, факторалгебры. Гомоморфизмы. Представления. Представления алгебры Ли $sl(2)$ . Универсальная обертывающая алгебра. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Теорема Адо-Ивасава (без доказательства). Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли. Форма Киллинга. <b>Соответствие Ли.</b> Подгруппы и подалгебры, нормальные подгруппы и идеалы, гомоморфизмы.	21	4	4			8	13
4. <b>Соответствие Ли.</b> Локально изоморфные группы. Универсальные накрывающие группы. Представления алгебр Ли и групп Ли.	18	4	4			8	10
<b>Промежуточная аттестация: зачет</b>							
В т.ч. текущий контроль	2						

#### 4. Образовательные технологии.

Занятия проводятся в форме лекций и практических занятий.

Лекционные занятия в основном проводятся в форме лекция-информация. Такая форма занятий ориентирована на изложение и объяснение студентам научной

информации, подлежащей осмыслению (на самой лекции, на практических занятиях и в ходе самостоятельной работы) и запоминанию.

Практические занятия предполагают разбор решений задач и самостоятельное решение задач, предлагаемых преподавателем, под контролем преподавателя, а также проверку знания теоретического материала, полученного на лекциях.

### **5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся.**

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Обсуждение итогов самостоятельных и контрольных работ.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М: Мир, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

#### **Примеры домашних практических занятий:**

1. Найти все алгебры Ли размерности 2 над полем.

2. Найти все неприводимые вещественные конечномерные представления алгебры Ли  $sl(2)$ .

3. Доказать, что алгебра Ли дифференцирований алгебры многочленов над  $\mathbb{R}$  является простой бесконечномерной алгеброй Ли.

4. Используя формулу для двойного векторного произведения, доказать, что множество векторов трехмерного пространства является алгеброй Ли относительно операции векторного произведения векторов.

5. Доказать, что множество всех кососимметрических матриц на поле  $K$  является подалгеброй алгебры Ли  $gl(n, K)$ .

Контрольные вопросы:

1. Найти все алгебры Ли размерности 2 над полем. (ОПК-1, ПК-1)

2. Найти все неприводимые вещественные конечномерные представления алгебры Ли  $sl(2)$ . (ОПК-1, ПК-1)

3. Доказать, что алгебра Ли дифференцирований алгебры многочленов над  $\mathbb{R}$  является простой бесконечномерной алгеброй Ли. (ОПК-1, ПК-1)

4. Используя формулу для двойного векторного произведения, доказать, что множество векторов трехмерного пространства является алгеброй Ли относительно операции векторного произведения векторов. (ОПК-1, ПК-1)

5. Доказать, что множество всех кососимметрических матриц на поле  $K$  является подалгеброй алгебры Ли  $gl(n, K)$ . (ОПК-1, ПК-1)
6. Найти все дифференцирования алгебры кватернионов. (ОПК-1, ПК-1)
7. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли. (ОПК-1, ПК-1)
8. Доказать, что  $sl(n, R)$  – простая алгебра Ли. (ОПК-1, ПК-1)
9. Найти алгебру Ли группы  $SO(3)$ . (ОПК-1, ПК-1)

## 6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Дисциплина направлена на развитие компетенций:

Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности (ОПК-1), завершающий этап;  
Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области (ПК-1), завершающий этап.

ОПК-1 Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности.

Индикаторы компетенции	ОЦЕНКИ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ						
	Не зачтено		Зачтено				
<b>ЗНАТЬ:</b> основные понятия и результаты теории групп Ли и алгебр Ли.	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полностью знания вследствие	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем

	отказа обучающегося от ответа				ошибок		программу подготовки.
<b>УМЕТЬ</b> решать основные задачи теории групп и алгебры Ли.	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Демонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Демонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Демонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Демонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Демонстрированы основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<b>ВЛАДЕТЬ</b> основными вычислительными алгоритмами теории групп и алгебры Ли.	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Демонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Демонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Демонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Демонстрированы творческий подход к решению нестандартных задач
<b>Мотивация (личностное отношение)</b>	Полное отсутствие учебной активности и мотивации	Учебная активность и мотивация слабо выражены, готовность решать поставленные	Учебная активность и мотивация низкие, слабо выражены, стремление решать задачи	Учебная активность и мотивация проявляются на среднем уровне, демонстрируется готовность выполнять	Учебная активность и мотивация проявляются на уровне выше среднего, демонстрируется готовность	Учебная активность и мотивация проявляются на высоком уровне, демонстрируется готовность	Учебная активность и мотивация проявляются на

		задачи качественн о отсутству ют	качественн о	поставленн ые задачи на среднем уровне качества	выполнять большинств о поставленн ых задач на высоком уровне качества	выполнять все поставленн ые задачи на высоком уровне качества	очень высок ом уровн е, демон стрир уется готовн ость выпол нять нестан дартн ые допол нител ьные задачи на высок ом уровн е качест ва
<b>Характеристика сформированности компетенции</b>	Компетенция не сформирована. отсутствуют знания, умения, навыки, необходимые для решения практических (профессиональных) задач. Требуется повторное обучение	Компетенция в полной мере не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. Требуется повторное обучение	Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по большинству	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям, но есть недочеты. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения практически х (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по некоторым профессиональным задачам.	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения стандартных практически х (профессиональных) задач.	Сформированность компетенции и полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для решения сложных практически х (профессиональных) задач.	Сформированность компетенции превышает стандартные требования. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для решения практически х (профессиональных) задач.

			практических задач.				творческого подхода к решению сложных профессиональных задач.
<b>Уровень сформированности компетенций</b>	Нулевой	Низкий	Ниже среднего	Средний	Выше среднего	Высокий	Очень высокий

ПК-1 Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области.

Индикаторы компетенции	ОЦЕНКИ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ						
	Не зачтено		Зачтено				
<b>ЗНАТЬ:</b> принципы определения общих форм и закономерностей теории групп Ли и алгебр Ли.	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<b>УМЕТЬ</b> определять общие формы и закономерности в теории групп и алгебр Ли.	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи

	ответа		объеме.	некоторые с недочетами.		в полном объеме.	. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<b>ВЛАДЕТ</b> опытом определения общих форм и закономерностей теории групп и алгебры Ли.	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми и недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы творческий подход к решению нестандартных задач
<b>Мотивация (личностное отношение)</b>	Полное отсутствие учебной активности и мотивации	Учебная активность и мотивация слабо выражены, готовность решать поставленные задачи качественно отсутствуют	Учебная активность и мотивация низкие, слабо выражены, стремятся решать задачи качественно	Учебная активность и мотивация проявляются на среднем уровне, демонстрируется готовность выполнять поставленные задачи на среднем уровне качества	Учебная активность и мотивация проявляются на уровне выше среднего, демонстрируется готовность выполнять большинство поставленных задач на высоком уровне качества	Учебная активность и мотивация проявляются на высоком уровне, демонстрируется готовность выполнять все поставленные задачи на высоком уровне качества	Учебная активность и мотивация проявляются на очень высоком уровне, демонстрируется готовность выполнять нестандартные дополнительные задачи на высоком уровне

							ом уровн е качест ва
<b>Характеристика сформированности компетенции</b>	Компетенция не сформирована. отсутствуют знания, умения, навыки, необходимые для решения практических (профессиональных) задач. Требуется повторное обучение	Компетенция в полной мере не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. Требуется повторное обучение	Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по большинству практических задач.	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям, но есть недочеты. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по некоторым профессиональным задачам.	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения стандартных практических (профессиональных) задач.	Сформированность компетенции и полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для решения сложных практических (профессиональных) задач.	Сформированность компетенции превышает стандартные требования. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для применения творческого подхода к решению сложных профессиональных задач.
<b>Уровень сформированности компетенций</b>	Нулевой	Низкий	Ниже среднего	Средний	Выше среднего	Высокий	Очень высокий

## 6.2. Описание шкал оценивания

В соответствии с учебным планом контроль усвоения студентами содержания дисциплины проводится в форме зачета в 7 семестре.

На зачете определяется:

- уровень усвоения студентом основного учебного материала по дисциплине;
- уровень понимания студентом изученного материала.

Зачет включает письменную и устную часть. Письменная часть направлена на выявление степени освоения базовых понятий, входящих в список вопросов к зачету, и решению основных задач. Устная часть зачета заключается в собеседовании в рамках тематики курса. Собеседование проводится в форме вопросов, на которые студент должен дать краткий ответ.

### Шкала оценок:

Зачтено	владение материалом, необходимым по данному предмету, с рядом ошибок
Не зачтено	владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка

Вопросы к зачету:

1. Определение гладкого многообразия. Гладкие отображения многообразий. Подмногообразие. Примеры. (ОПК-1, ПК-1)
2. Касательный вектор как дифференцирование в точке. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциал гладкого отображения. (ОПК-1, ПК-1)
3. Гладкое векторное поле. Коммутатор векторных полей. Алгебра Ли векторных полей. Ф-связанные векторные поля. Распределения. Интегрируемость. (ОПК-1, ПК-1)
4. Определение группы Ли. Примеры. Подгруппы Ли. Гомоморфизм групп Ли. (ОПК-1, ПК-1)
5. Действие группы Ли на многообразии. Орбиты. Стабилизатор точки. Ядро гомоморфизма групп Ли. (ОПК-1, ПК-1)
6. Однородное пространство: структура многообразия, действие группы. (ОПК-1, ПК-1)
7. Левоинвариантные векторные поля. Алгебра Ли группы Ли. Примеры. (ОПК-1, ПК-1)
8. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Канонические координаты. (ОПК-1, ПК-1)
9. Связные абелевы группы Ли. (ОПК-1, ПК-1)
10. Гомоморфизм групп Ли и соответствующий гомоморфизм алгебр Ли. (ОПК-1, ПК-1)
11. Присоединенное представление. (ОПК-1, ПК-1)
12. Подалгебры, идеалы, факторалгебры алгебры Ли. Теоремы о гомоморфизмах. (ОПК-1, ПК-1)
13. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля. (ОПК-1, ПК-1)
14. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли. (ОПК-1, ПК-1)
15. Соответствие Ли между группами Ли и алгебрами Ли. Теорема Адо-Ивасава (без доказательства). Существование группы Ли с заданной алгеброй Ли. (ОПК-1, ПК-1)
16. Соответствие Ли для нормальных подгрупп. (ОПК-1, ПК-1)
17. Накрывающие пространства. Накрывающие топологические группы. Универсальные накрывающие. (ОПК-1, ПК-1)

## 6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- индивидуальное собеседование,
- письменные ответы на вопросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания.

Типы практических контрольных заданий:

- задания на установление правильной последовательности, взаимосвязанности действий,
- установление последовательности действий (описание алгоритма выполнения действия).

**Критерии оценок выполнения контрольной работы и домашнего практического задания**

(каждая задача оценивается в 2 балла)

Решена полностью	2
Решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами	1,5
Решена задача наполовину	1
Сделан первый этап в решении задачи	0,5
Нет решения	0

**Суммарная оценка выполнения контрольной работы и домашнего практического задания**

Количество баллов	Оценка	
9,5 -10	Превосходно	Зачтено
8,5 - 9	Отлично	
7,5 -8	Очень хорошо	
6-7	Хорошо	
3,5 - 5,5	Удовлетворительно	
2 – 3	Неудовлетворительно	Не зачтено
0 – 1,5	Плохо	

**6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.**

**Контрольная работа:  
Вариант 1**

1. Пусть  $A$  – алгебра над полем  $K$ . Показать, что множество всех дифференцирований алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно коммутатора  $[D_1, D_2]=D_1D_2 - D_2D_1$ . (ОПК-1, ПК-1)
2. Показать, что пространство ассоциативной алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно произведения  $[a,b]=ab - ba$ . (ОПК-1, ПК-1)
3. Показать, что множество векторных полей с нулевой дивергенцией является подалгеброй Ли алгебры Ли всех гладких векторных полей в  $R^n$ . (ОПК-1, ПК-1)
4. Найти алгебру Ли группы Ли  $GL(n, R)$ . (ОПК-1, ПК-1)
5. Экспоненциальное отображение в группе  $GL(n, R)$ . Доказать сходимость ряда  $e^A$ . (ОПК-1, ПК-1)

### Вариант 2

1. Пусть  $K$  – поле характеристики  $p>0$ . Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов  $K[x]/(x^p)$ . (ОПК-1, ПК-1)
2. Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры многочленов  $K[x_1, \dots, x_n]$  над полем  $K$ . (ОПК-1, ПК-1)
3. Показать, что множество кососимметрических матриц является подалгеброй алгебры Ли  $gl(n, R)$ . (ОПК-1, ПК-1)
4. Найти алгебры Ли групп Ли  $R$  и  $R^*$ . (ОПК-1, ПК-1)
5. Найти все с точностью до изоморфизма двумерные алгебры Ли. (ОПК-1, ПК-1)

### Типовые контрольные задания.

1. Показать, что пространство ассоциативной алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно произведения  $[a,b]=ab - ba$ .
2. Пусть  $A$  – алгебра над полем  $K$ . Показать, что множество всех дифференцирований алгебры  $A$  является алгеброй Ли относительно коммутатора  $[D_1, D_2]=D_1D_2 - D_2D_1$ .
3. Найти все дифференцирования алгебры кватернионов.
4. Найти все дифференцирования алгебры многочленов, алгебры многочленов Лорана. Доказать, что над полем нулевой характеристики эти алгебры простые.
5. Пусть  $K$  – поле характеристики  $p>0$ . Найти алгебру Ли дифференцирований алгебры срезанных многочленов  $K[x]/(x^p)$ .
6. Показать, что множество векторных полей с нулевой дивергенцией является подалгеброй Ли алгебры Ли всех гладких векторных полей в  $R^n$ .
7. Показать, что множество всех гамильтоновых векторных полей в  $R^n$ ,  $n=2m$ , является подалгеброй алгебры Ли всех гладких векторных полей.
8. Найти все с точностью до изоморфизма трехмерные нильпотентные алгебры Ли.
9. Доказать, что алгебра Ли  $sl(n, R)$  – простая алгебра Ли.
10. Найти алгебру Ли группы  $GL(n, R)$ ,  $SL(n, R)$
11. Найти алгебру Ли группы  $SO(3)$ . Найти размерность группы  $O(n, R)$ .
12. Найти алгебру Ли группы  $SU(2)$ .
13. Доказательство сходимости ряда  $e^A$ . Экспоненциальное отображение на группе  $GL(n, R)$ .
14. Привести примеры однопараметрических подгрупп в вещественной ортогональной группе  $O(3)$ .
15. Вычислить группу  $\pi_1(G)$ ,  $G=SO(3)$ ,  $SO(n)$ .
16. Найти неприводимые представления алгебры Ли  $sl(2)$ .
17. Справедлива или нет теорема Ли для разрешимых алгебр Ли над произвольным полем? Привести примеры.

### 6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014.

[http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest\\_stud%202014.pdf](http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest_stud%202014.pdf)

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

## **7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) Основная литература:**

1. Шевалле К. Теория групп Ли. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

### **б) Дополнительная литература:**

1. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1968.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Ч. 3. М: Мир, 1978.

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

### **в) Интернет-ресурсы:**

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

1. Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

2. Библиотека math.ru

3. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/algebra.htm>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет». Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор: д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ Кузнецов М.И.

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Зав кафедрой, д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института Информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского от \_\_\_\_\_ г., протокол № \_\_\_\_\_.