

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДАЮ:

директор института

_____ В.П. Гергель

« ____ » _____ 2020

Рабочая программа дисциплины

Математические методы нелинейной динамики

Уровень высшего образования

специалитет

_____ (бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Форма обучения

очная

Нижегород

2020 год

Лист актуализации

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК

__ 20__ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2019-2020 учебном году на заседании кафедры

Протокол от __ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _____

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК

__ 20__ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2020-2021 учебном году на заседании кафедры

Протокол от __ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _____

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК

__ 20__ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2021-2022 учебном году на заседании кафедры

Протокол от __ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _____

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК

__ 20__ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для
исполнения в 2022-2023 учебном году на заседании кафедры

Протокол от __ 20__ г. № __
Зав. кафедрой _____

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений. Код дисциплины – **Б1.В.01**

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ПК-1. Владеет методами математического исследования при анализе проблем механики на основе знаний фундаментальных физико-математических и компьютерных наук и навыками проблемно-задачной формы представления научных знаний	ПК-1.1. Знает теоретические основы фундаментальных методов исследования проблем механики.	<i>Знать</i> терминологию, аппарат и методы решения задач, используемые в нелинейной динамике	<i>Коллоквиум</i>
	ПК-1.2. Умеет самостоятельно применять полученные знания для анализа объекта исследования, определения целей и задач исследования, а также выбора корректного метода исследования научной проблемы.	<i>Уметь</i> четко формулировать теоремы, решать теоретические и вычислительные задачи, обнаруживать связи с другими разделами математики и механики	<i>Контрольная работа</i>
	ПК-1.3. Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области механики, а именно решения научных задач в соответствии с поставленной целью и выбранной методикой.	<i>Владеть</i> навыками обоснования корректности выбранных методов решения задач	<i>Задачи</i>

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	50
- занятия лекционного типа	32
- занятия семинарского типа	16
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	58
Промежуточная аттестация – экзамен	36

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,	Всего (часы)	в том числе
--	--------------	-------------

форма промежуточной аттестации по дисциплине		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					Самостоятельная работа студента часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные работы	Консультации индивидуальные	Всего контактных часов	СРС
Введение. Динамические системы, основные понятия. Примеры задач из физики, механики, биологии, экономики, приводящие к понятию «динамическая система». Динамические системы с непрерывным временем (системы дифференциальных уравнений) и с дискретным временем (отображения). Устойчивость тривиального решения. Второй метод Ляпунова. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению. Общая классификация состояний равновесия многомерных систем	18	6	2			8	10
Качественные методы анализа двумерных динамических систем. Тожественность топологических структур. Особые траектории и ячейки динамических систем. Основные понятия (фазовое пространство, фазовая кривая, состояние равновесия, векторное поле, особые точки). Классификация простых состояний равновесия. Сложные состояния равновесия. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых. Индексы состояний равновесия (особых точек векторного поля). Поведение траекторий на бесконечности. Особые траектории и ячейки динамических систем. Понятие грубости динамической системы. Необходимые и достаточные условия грубости. Примеры анализа двумерных динамических систем. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС. Понятие грубости (структурной устойчивости). Необходимые и достаточные условия грубости.	20	6	4			10	10
Консервативные системы с одной степенью свободы. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет). Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова. Построение решений уравнений с одной степенью свободы. Эллиптические интегралы и функции. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = 0$. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях уравнения КДВ. Приложение к задаче Кеплера	20	6	4			10	10

о движении частицы в поле тяготения. Обобщение на произвольные двумерные системы Гамильтона. Задача Вольтерра.						
Консервативные трехмерные автономные системы. Уравнения Эйлера движения асимметричного волчка. Построение решений. Уравнения гидродинамического типа. Метод Галеркина. Триплет Обухова. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемые случаи. Многомерные системы Гамильтона. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона. Теорема Пуассона. Теоремы Лиувилля и Арнольда. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: $\ddot{x} + x + x^3 = 0$. Условно периодические движения. Пространственное и временное средние. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Теория КАМ.	18	6	2		8	10
Квазиконсервативные автономные системы. Метод усреднения. Теоремы Боголюбова. Асимптотический метод Крылова-Боголюбова (на примере уравнения $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$). Применение метода усреднения для анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$. Пример анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu(a + bx^2)\dot{x}$ методом усреднения. Метод малого параметра Пуанкаре. Пример: уравнение Ван дер Поля. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда. Метод усреднения для квазигамильтоновых существенно нелинейных двумерных автономных систем. Существование предельных циклов. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и ее обобщение. Возможные типы фазовых портретов для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon(d - x^2)\dot{x}$. Разрывные колебания. Метод точечных отображений. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса. Пример определения функции последования.	18	6	2		8	10
Неавтономные периодические по времени системы. Вынужденные колебания в линейных системах. О возможности применения метода усреднения для анализа уравнений вида: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, vt)$. Применение метода усреднения в резонансном случае для анализа уравнений вида $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, vt)$. Применение метода усреднения для анализа уравнения $\ddot{x} + x = \varepsilon(ax^3 + dx + b\dot{x} + c \sin(t))$ Синхронизация колебаний на примере уравнения	12	2	2		4	8

$\ddot{x} + x = \varepsilon(dx + (1 - x^2)\dot{x} + c \cos(t))$. Параметрические системы. Основы теории Флоке. Резонансы в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Усреднение в резонансном случае. Возможные типы резонансных зон в существенно нелинейных квазигамильтоновых системах. Анализ резонансных зон на примере уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon((d - x^2)\dot{x} + c \sin(\nu t))$							
Текущий контроль	2						
Промежуточная аттестация - экзамен	36						
Итого	144	32	16			48	58

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (экзамен).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

К видам самостоятельной работы обучающихся относятся: изучение литературы, выступление на семинаре с ответами на вопросы преподавателя и студентов.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки,	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	ошибки.	ошибки.	несколько негрубых ошибок	несколько несущественных ошибок	без ошибок.	
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами.	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач.

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Уровень подготовки	
Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1 Контрольные вопросы

Вопросы к экзамену

Тема 1. Введение. Динамические системы, основные понятия

1. Простейшие примеры задач динамики (грузик на пружине, колебательный контур, маятник).
2. Динамические системы: основные понятия, классификация, пример.
3. Устойчивость состояния равновесия. Второй метод Ляпунова.
4. Устойчивость состояния равновесия по линейному приближению. Критерий Гурвица.
5. Типы простых состояний равновесия в многомерных системах.

Тема 2. Качественные методы анализа двумерных динамических систем.

6. Основные понятия. Особые траектории и ячейки динамических систем.
7. Классификация простых состояний равновесия.
8. Направление стремления фазовых кривых к простому состоянию равновесия. Сложные состояния равновесия. Пример.
9. Предельные циклы. Критерии отсутствия замкнутых фазовых кривых.
10. Индексы особых точек.
11. Поведение траекторий на бесконечности.
12. Примеры анализа динамических систем (в билете будет один из примеров, рассмотренных в лекциях).
13. Элементы теории бифуркаций двумерных ДС.

Тема 3. Интегрируемые системы с одной степенью свободы.

14. Системы с одной степенью свободы (интегралы, фазовый портрет).
15. Теорема Лагранжа-Дирихле и обратная теорема Ляпунова.
16. Построение решений уравнений с одной степенью свободы. Эллиптические интегралы и функции.
17. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.
18. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + x - x^3 = 0$.
19. Построение решений для уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$.
20. Сравнение свойств решений уравнений $\ddot{x} + x \pm x^3 = 0$, $\ddot{x} + x = 0$.
21. Приложение к задаче о стационарных волновых решениях уравнения КДВ.
22. Приложение к задаче Кеплера о движении частицы в поле тяготения.

Тема 4. Интегрируемые трехмерные системы.

23. Трехмерные системы. Уравнения движения асимметричного волчка и их решение.
24. Уравнения гидродинамического типа.
25. Уравнения динамики квантового генератора и система Лоренца. Интегрируемый случай. Построение решений (сведение к квадратурам).

Тема 5. Многомерные Гамильтоновы системы.

26. Интегрируемость. Метод Якоби-Гамильтона.
27. Теоремы Пуассона, Лиувилля и Арнольда.
28. Переменные действие-угол для систем с одной степенью свободы. Пример: $\ddot{x} + x + x^3 = 0$.
29. Условно периодические движения. Пространственное и временное средние.
30. Неинтегрируемые гамильтоновы системы. Основы теории КАМ.

Тема 6. Квазиинтегрируемые (квазиконсервативные) автономные системы.

31. Принцип усреднения. Пример.
32. Метод усреднения. Первая теорема Боголюбова.
33. Метод Пуанкаре. Периодические решения в уравнении $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$.
34. Анализ уравнения $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$ методом усреднения.
35. Пример анализа уравнения $\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}$ методом усреднения.
36. Мягкий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.
37. Жесткий режим возбуждения автоколебаний на примере маятника Фроуда.
38. Метод усреднения для двумерных автономных систем, близких к нелинейным гамильтоновым.
39. Существование предельных циклов для двумерных автономных систем, близких к нелинейным гамильтоновым. Теорема Пуанкаре-Понтрягина и ее обобщение.
40. Пример: исследовать уравнение $\ddot{x} + x + x^3 = \mu(d - x^2)\dot{x}$
41. Метод точечных преобразований. Диаграмма Ламерея и теорема Кенигса. Пример.
42. Разрывные колебания.

Тема 7. Квазиинтегрируемые (квазиконсервативные) неавтономные системы.

43. Вынужденные колебания в линейных системах.
44. Вынужденные колебания на примере уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, vt)$.
45. Роль нелинейности на примере уравнения $\ddot{x} + x = \mu(ax^3 + dx + b\dot{x} + c \sin(vt))$.
46. Синхронизация колебаний на примере уравнения: $\ddot{x} + x = \mu[(1 - x^2)\dot{x} + dx + c \cos(vt)]$
47. Параметрические системы.
48. Резонансы в существенно нелинейных системах. Усреднение в резонансном случае.
49. Возможные типы резонансных зон.
50. Структура резонансных зон для уравнения $\ddot{x} + x - x^3 = \mu(d\dot{x} + c \sin(vt))$, где d, c, v - параметры.

5.2.2

Формулировка заданий для контрольных работ

1. Для предлагаемого набора двумерных динамических систем решить вопрос об устойчивости состояния равновесия. Примеры систем см., например, в пособии «Динамические системы». Часть 1. Учебно-методический комплекс. Сост. А.Д. Морозов.-Н.Новгород: ННГУ, 2002, 32 с.
2. Построить фазовые портреты для конкретных двумерных динамических систем. Качественное исследование трехмерной системы Лоренца.
3. Построение решений уравнений Дюффинга, маятникового типа, уравнений с квадратичной нелинейностью.
4. Построение решений для интегрируемой системы, описывающей односторонний квантовый генератор.
5. Исследование уравнения Ван дер Поля методом усреднения.
6. Доказательство теоремы о максимальном числе предельных циклов при алгебраическом возмущении линейного осциллятора.
7. Качественное исследование автономных возмущенных уравнений Дюффинга и маятника.

8. Качественное исследование периодических по времени возмущений уравнений Дюффинга и маятника.

Вариант 1

$\dot{x} = x - y, \dot{y} = -y + x^2 y$ Устойчивость состояния равновесия	$\ddot{x} + x - x^3 = 0.$ $x=?$
$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \varepsilon(a + bx - x^2)y, a, b - \text{параметры}$	$\ddot{x} + x + x^3 = 0$ $x=?$
$\ddot{x} + \sin(x) + b\dot{x} + a = 0$ Фазовые портреты	$\ddot{x} - x + x^3 = 0$ $x=?$ в области $\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} > 0$

Вариант 2

$\dot{x} = x(a - bx - y), \dot{y} = y(x - 1)$ Устойчивость состояния равновесия	$\ddot{x} + \sin(x) = 0$ $x=?$ В области колебательных движений
$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3 + \varepsilon(a - x^2)y, a - \text{параметр}$	$\ddot{x} + \sin(x) = 0$ $x=?$ В области вращательных движений
$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \varepsilon(a + by + cy^2)y, a, b, c - \text{параметры}$	$\ddot{x} - x + x^3 = 0$ $x=?$ в области $\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} < 0$

Нижегородский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского

Кафедра ДУМЧА Дисциплина Математические методы
нелинейной динамики

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Простейшие примеры задач динамики (грузик на пружине, колебательный контур, маятник).
2. Классификация простых состояний равновесия.
3. Вынужденные колебания на примере уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \nu t)$.

Зав. кафедрой _____

Экзаменатор _____

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Морозов А.Д. Введение в математические методы нелинейной динамики. Электронное учебно-методическое пособие.-Н.Новгород:Нижегородский госуниверситет, 2012.098 с.
www.unn.ru/books.

2. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс.
<https://e.lanbook.com/reader/book/634/#authors>

б) дополнительная литература:

3. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. - Изд-во Красноярского ун-та, Красноярск, 1995 (учебное пособие). <https://lib.mexmat.ru>

4. Нелинейная динамика и управление Сборник статей

https://e.lanbook.com/book/48268#book_name

5. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.-М.: Наука, 1976.

<https://unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files...>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

<http://www.unn.ru/e-library/>

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Автор (ы) _____ А.Д.Морозов

Рецензент (ы) _____

Заведующий кафедрой _____ А.В.Калинин