

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Высшая школа общей и прикладной физики
(факультет)

УТВЕРЖДАЮ:

Декан ВШОПФ _____ Е.Д. Господчиков

« _____ » _____ 2020 г.

Рабочая программа дисциплины

Векторный и тензорный анализ

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность
03.03.02 Физика

Направленность образовательной программы
профиль: Фундаментальная физика

Квалификация (степень)
бакалавр

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2020

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Векторный и тензорный» входит в модуль «Математика», который относится к базовой части Блока 1 «Дисциплины, модули» ОПОП. Дисциплина является обязательной для освоения в четвертом семестре второго года обучения в бакалавриате.

Целями освоения дисциплины являются:

- формирование у студентов представления об основных методах классической и современной дифференциальной геометрии и их применениях в математических моделях физических систем;
- освоение студентами методов исследования кривых и поверхностей, методов вычисления многомерных интегралов, оперирования с тензорами и тензорными полями. Важными задачами лекционного курса и практических занятий является демонстрация тесных связей различных математических дисциплин и их роли в теоретической физике;
- формирование у студентов общепрофессиональных компетенций в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ по направлению подготовки 03.03.02 «Физика».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций
ОПК-2 способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей (этап освоения – базовый)	<i>З1 (ОПК-2) Знать</i> основы классической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей; основные методы вычисления многомерных интегралов; основные теоремы классического векторного анализа (теоремы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса); законы преобразования векторных и тензорных полей при заменах координат, использовании координатных систем в вычислениях с производными и интегралами; элементы теории дифференциальных форм (понятие формы; операции с формами – внешнее произведение и внешнее дифференцирование; интегрирование форм по поверхностям); формулировку теоремы Стокса для дифференциальных форм; основы теории ковариантного дифференцирования (понятие о параллельности векторных и тензорных полей; объект связности и ковариантные производные векторных полей и 1-форм; дифференциальные уравнения параллельного переноса; геодезические кривые). <i>У1 (ОПК-2) Уметь</i> вычислять геометрические характеристики кривых и поверхностей; вычислять многомерные интегралы, в том числе с использованием теоремы о замене переменных; применять классические теоремы векторного анализа для вычисления криволинейных, поверхностных и объемных интегралов; вычислять простейшие интегралы от дифференциальных форм в том числе с применением теоремы Стокса; вычислять ковариантные производные тензорных полей в простейших случаях; находить геодезические кривые на основных двумерных поверхностях (плоскость, сфера, конус). <i>В1 (ОПК-2) Владеть</i> навыками решения задач, основанных на полученных в ходе освоения дисциплины знаниях.

3. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц, всего 180 часов, из которых 82 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (32 часа занятия лекционного типа, 48 часов занятия семинарского типа (семинары, научно-практические занятия), 2 часа мероприятия промежуточной аттестации), 36 часов подготовка к экзамену, 62 часа составляет самостоятельная работа обучающегося.

Содержание дисциплины (модуля)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1. Введение. Обзор теории метрических пространств	14	4	4		8	6
Тема 2. Теория кривых и поверхностей	14	4	4		8	6
Тема 3. Гладкие кривые и поверхности	12	2	4		6	6
Тема 4. Мера Жордана и интеграл Римана	12	2	4		6	6
Тема 5. Классический векторный анализ	16	4	6		10	6
Тема 6. Тензорные поля, криволинейные координаты и основные тензорные операции	16	4	6		10	6
Тема 7. Метрический тензор	16	4	6		10	6
Тема 8. Формы и интегрирование. Теорема Стокса	12	2	4		6	6
Тема 9. Ковариантное дифференцирование и параллельный перенос	12	2	4		6	6
Тема 10. Математические основы Гамильтоновой механики	18	4	6		10	8
в т.ч. текущий контроль			4			
Промежуточная аттестация – Экзамен					2	36

Текущий контроль успеваемости осуществляется в виде решений и последующей проверки домашних контрольных работ, а также в рамках занятий практического и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций. Итоговый контроль осуществляется на экзамене.

4. Образовательные технологии

При изучении дисциплины используются современные образовательные технологии. Предусматривается широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (разбор конкретных ситуаций, тренинги по решению прак-

тических задач) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) по дисциплине проходит в форме лекций и практических занятий, а также в виде коллективных и индивидуальных консультаций. На занятиях лекционного типа используются мультимедийные средства поддержки образовательного процесса, часть занятий проводятся в виде лекций с проблемным изложением материала. На занятиях практического типа разбираются решения задач различной степени сложности, проводятся обсуждения рассматриваемых проблем в свете последних научных достижений в данной области. Студенты работают как индивидуально, так и коллективно.

Самостоятельная работа включает в себя выполнение домашних контрольных работ и теоретическую подготовку к занятиям по материалам лекций и рекомендованной литературе, приведенной в конце данной программы. Кроме того, студенты имеют возможность принимать участие в семинарах с представителями российских и зарубежных научных организаций, проводимых в Федеральном исследовательском центре Институт прикладной физики Российской академии наук.

Формой итогового контроля знаний студентов по дисциплине является экзамен, в ходе которого оценивается уровень теоретических знаний и навыки решения практических задач.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студента – неотъемлемая часть подготовки высококвалифицированного специалиста в соответствующей области. Ее цель – формирование у студентов способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

Самостоятельная работа студентов подразумевает проработку лекционного и дополнительного материала, решение домашних контрольных работ с последующей проверкой навыков решения задач.

Проработка лекционного материала осуществляется еженедельно после проведения аудиторных занятий в рамках часов, отведенных студентам на самостоятельную работу. Кроме того, работа с лекционным и дополнительным материалом (рекомендованной литературой, приведенной в конце данной программы) проводится в период сессии при подготовке к экзамену по дисциплине.

Выполнение домашних контрольных работ осуществляется еженедельно или раз в две недели в соответствии с графиком изучения соответствующего лекционного материала и проведения практических занятий по соответствующей тематике.

Задачи для выполнения самостоятельных контрольных работ по каждому разделу дисциплины составляются преподавателем самостоятельно при ежегодном обновлении банка тестовых заданий. Количество вариантов зависит от числа обучающихся.

Типовые задачи, предлагаемые студентам в качестве домашних контрольных работ:

Задача 1.

Найти в произвольной точке кривизну и кручение кривой $\gamma = \{xz = a^2, x/z = e^{2y/a}\} \subset \mathbf{R}^3, a > 0$

Задача 2

Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z, a > 0$

Задача 3

Найти поток векторного поля $\vec{F} = (x^6, a^2 y^4, a^4 z^2)$ через часть поверхности параболоида $\{x^2 + y^2 = bz, z \leq b\}$ в направлении внутренней нормали

Задача 4

2-форма ω в сферической системе координат в \mathbb{R}^3 имеет вид $\omega_{\varphi\theta} = -\omega_{\theta\varphi} = 1$, остальные компоненты нулевые. Найти интеграл от этой формы по поверхности $\Sigma = \{x + y + z = a, x, y, z \geq 0\}$.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине,

включающий:

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования.

ОПК-2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«незачет»		«зачет»				
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»
<u>Знания</u> Знать основы классической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей; основные методы вычисления многомерных интегралов; основные теоремы классического векторного анализа; законы преобразования векторных и тензорных полей при заменах координат, использовании координатных систем в вычислениях с производными и интегралами; элементы теории дифференциальных форм; формулировку теоремы Стокса для дифференциальных форм; основы теории ковариантного дифференцирования.	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u> Уметь вычислять геометрические характеристики кривых и поверхностей; вычислять многомерные	Отсутствие минимальных умений. Невозможность	При решении стандартных задач не продемонстрированы	Продемонстрированы основные умения. Решены	Продемонстрированы все основные умения. Ре-	Продемонстрированы все основные умения. Ре-	Продемонстрированы все основные умения, ре-	Продемонстрированы все основные умения. Ре-

интегралы; применять классические теоремы векторного анализа; вычислять простейшие интегралы от дифференциальных форм; вычислять ковариантные производные тензорных полей в простейших случаях; находить геодезические кривые на основных двумерных поверхностях	оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	рованы основные умения. Имели место грубые ошибки.	типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	шены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	шены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	шены все основные задачи с отдельными существенными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	шены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u> Владеть навыками решения задач, основанных на полученных в ходе освоения дисциплины знаниях.	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач
Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий	0 – 20 %	20 – 50 %	50 – 70 %	70-80 %	80 – 90 %	90 – 99 %	100%

6.2. Описание шкал оценивания

Итоговый контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде экзамена, на котором определяется:

- уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
- уровень понимания студентами изученного материала
- способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Экзамен проводится в устной форме. Устная часть экзамена заключается в ответе студентом на теоретические вопросы курса (с предварительной подготовкой) и последующем собеседовании в рамках тематики курса. Собеседование проводится в форме вопросов, на которые студент должен дать краткий ответ. Практическая часть экзамена предусматривает решение двух задач по различным разделам курса.

Оценка	Уровень подготовки
Превосходно	Высокий уровень подготовки, безупречное владение теоретическим материалом. Студент дает полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета; точно отвечает на дополнительные вопросы; приводит исчерпывающие, аргументированные решения всех сформулированных в билете задач. Изложение решений и полученные ответы отличаются логической последовательностью, четкостью в выражении мыслей и обоснованностью выводов, демонстрирующих знание общефизических и профессиональных дисциплин, умение уверенно применять на практике приобретенные навыки, владение в полной мере методиками решения задач. 100 %-ное выполнение контрольных экзаменационных заданий

Отлично	<p>Высокий уровень подготовки с незначительными ошибками. Студент дает полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета; точно отвечает на дополнительные вопросы; приводит почти полные, аргументированные решения всех сформулированных в билете задач с незначительными недочетами. Изложение решений и полученные ответы отличаются логической последовательностью, четкостью в выражении мыслей и обоснованностью выводов, демонстрирующих знание общефизических и профессиональных дисциплин, умение применять на практике приобретенные навыки, владение методиками решения задач.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий на 90% и выше</p>
Очень хорошо	<p>Хорошая подготовка. Студент дает ответ на все теоретические вопросы билета с небольшими неточностями; неполно отвечает на дополнительные вопросы; приводит достаточно аргументированные и почти полные решения всех сформулированных в билете задач с незначительными недочетами; или исчерпывающее решение приводится только для одной из двух задач билета, а вторая задача решена с заметными недочетами. Изложение решений и полученные ответы отличаются логической последовательностью, четкостью в выражении мыслей и обоснованностью выводов, демонстрирующих знание общефизических и профессиональных дисциплин, умение применять на практике приобретенные навыки, владение основными методиками решения задач.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 80 до 90%.</p>
Хорошо	<p>В целом хорошая подготовка с заметными ошибками или недочетами. Студент дает полный ответ на все теоретические вопросы билета с небольшими неточностями, допускает ошибки при ответах на дополнительные вопросы; приводит почти полные решения всех сформулированных в билете задач с некоторыми недочетами; или исчерпывающее решение приведено только для одной из двух задач билета, а вторая задача решена со значительными погрешностями. Изложение решений и полученные ответы отличаются логической последовательностью, достаточной четкостью в выражении мыслей и не всегда полной обоснованностью выводов, демонстрирующих, в целом, знание общефизических и профессиональных дисциплин, умение применять на практике приобретенные навыки, владение основными методиками решения задач.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 70 до 80%.</p>
Удовлетворительно	<p>Минимально достаточный уровень подготовки. Студент показывает минимальный уровень теоретических знаний, допускает ошибки при ответах на дополнительные вопросы; приводит неполные, слабо аргументированные решения всех сформулированных в билете задач. Изложение решений и полученные ответы не отличаются стройной логической последовательностью, четкостью в выражении мыслей и обоснованностью выводов, что говорит о не достаточно полном понимании общефизических и профессиональных дисциплин, умении применять на практике лишь некоторые приобретенные навыки, владении не всеми изученными методиками решения задач.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 50 до 70%.</p>
Неудовлетворительно	<p>Подготовка недостаточная и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы, как на теоретические вопросы билета, так и на наводящие и дополнительные вопросы экзаменатора; приводит решения сформулированных в билете задач с грубыми недочетами, что говорит о недостатке знаний по общефизическим и профессиональным дисциплинам, отсутствии умения применять на практике приобретенные навыки, не владение методиками</p>

	решения задач. Выполнение контрольных экзаменационных заданий до 50%.
Плохо	Подготовка абсолютно недостаточная. Студент не отвечает на поставленные вопросы, демонстрирует полное непонимание сформулированных в билете задач. Выполнение контрольных экзаменационных заданий менее 20 %.

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- индивидуальное собеседование,
- устные и/или письменные ответы на вопросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания (далее – ПКЗ), включающие одну или несколько задач.

По сложности ПКЗ разделяются на простые (стандартные) и комплексные задания. Простые ПКЗ предполагают решение в одно или два действия, применяются для оценки умений. Комплексные задания (задания повышенной сложности) требуют поэтапного решения и развернутого ответа с применением нестандартных подходов к решению. Комплексные практические задания применяются для оценки владений.

6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

Теоретические вопросы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины:

- 1) Кривые в R^n . Геометрия кривых в R^3 . Формулы Френе.
- 2) Длина кривой. Криволинейные интегралы I-ого рода.
- 3) Векторные поля и криволинейные интегралы II-ого рода.
- 4) Поверхности в R^n . Длина кривой на поверхности и первая квадратичная форма.
- 5) Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизны плоских сечений, главные кривизны, средняя и Гауссова кривизна.
- 6) Мера Жордана: конструкция и основные свойства.
- 7) Интеграл Римана в R^n . Критерии интегрируемости.
- 8) Сведение кратных интегралов к повторным. Теорема Фубини.
- 9) Замена переменных в кратных интегралах.
- 10) Несобственные кратные интегралы.
- 11) Ориентация векторного пространства и поверхности.
- 12) Формула Грина. Потенциальные векторные поля.
- 13) Площадь поверхности и поверхностный интеграл I-ого рода.
- 14) Поверхностные интегралы II-ого рода.
- 15) Классический векторный анализ. Оператор Гамильтона ∇ .
- 16) Операции *div* и *rot*, оператор Лапласа. Правило стрелок
- 17) Теорема Остроградского-Гаусса.
- 18) Теорема Стокса.
- 19) Потенциальные и соленоидальные векторные поля в R^3 .
- 20) Касательные векторы в точке R^n . Касательное и кокасательное пространство.

- 21) Тензорные поля в R^n .
- 22) Операции над тензорами. Метрический тензор. Поднятие и опускание индексов.
- 23) Метрический тензор. Длина кривых, геодезические.
- 24) Метрический тензор и поверхностные интегралы первого рода.
- 25) Дифференциальные формы. Интегрирование форм.
- 26) Внешний дифференциал и формула Стокса. Точные и замкнутые формы.
- 27) Ковариантное дифференцирование. Параллельный перенос, геодезические.
- 28) Кривизна связности.
- 29) Метрический тензор и связность Леви-Чивитта.
- 30) Замкнутые 2-формы и скобка Пуассона.

Типовые задачи для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины:

Для оценки сформированности компетенции ОПК-2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.

Задача 1

Метрический тензор в области $\Omega = \{(x, y), y > 0\} \in \mathbb{R}^2$ имеет вид $g_{ik} = \frac{1}{y^2} \delta_{ik}$.

Докажите, что дуги окружностей с центрами на прямой $y=0$ являются геодезическими связности Леви-Чивитта этой метрики.

Задача 2

Найти в произвольной точке Гауссову и среднюю кривизну поверхности $\Sigma = \{(x^2 + y^2 + z^2 + p^2)^2 = q^2(x^2 + y^2)\} \subset \mathbb{R}^3$, $0 < 2p < q$.

Задача 3

Найти массу сферического слоя $\{a^2 < x^2 + y^2 + z^2 < 4a^2\}$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния до прямой $x = y = z$, а максимальное значение плотности равно γ .

Задача 4

Найти электростатический потенциал однородно заряженного шара в произвольной точке пространства.

Задача 5

Найти кривизну и кручение траектории точечной заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

Задача 6

Найти геодезические кривые на двумерном торе.

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся при реализации образовательных программ высшего образования в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 29.12.2017 г. №630-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Векторный и тензорный анализ»

а) основная литература:

- 1) В.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. - 759 с. – 93 экз.
- 2) А.В.Погорелов. Дифференциальная геометрия. Харьков, 1967. - 176 с. – 32 экз.
- 3) Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. М., Наука, 1984, - 592 с. – 132 экз.

б) дополнительная литература:

- 1) Кратные интегралы и ряды [Электронный ресурс]: Учебник / Будак Б.М., Фомин С.В. - 3-е изд., - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922103008.html>
- 2) Задачи по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] / Розендорн Э.Р. - 3-е изд., испр. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922108218.html>
- 3) Лекции по дифференциальной геометрии. [Электронный ресурс] / Сизый С. В. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107426.html>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1) Малышев А.И., Максимова Г.М. Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Электронное учебно-методическое пособие ННГУ. <http://window.edu.ru/resource/324/79324/files/VT A4phys.pdf>

2) Научно-образовательный сайт MechMath. Учебно-образовательная физико-математическая библиотека. Дифференциальная геометрия и тензорный анализ. <http://mechmath.ipmnet.ru/lib/?s=difgeometry>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Для проведения лекций и практических занятий требуется типовое оборудование лекционной аудитории.

Для подготовки самостоятельных контрольных работ и для их графического представления (если это необходимо), а также для расширения коммуникационных возможностей студенты имеют возможность работать в компьютерных классах с соответствующим лицензионным программным обеспечением и выходом в Интернет.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО ННГУ с учетом рекомендаций и ОПОП ВПО по направлению 03.03.02 «Физика», профиль «Фундаментальная физика».

Автор _____

И.А. Шерешевский

Рецензент _____

Программа одобрена на заседании методической комиссии факультета «Высшая школа общей и прикладной физики»
от _____ года, протокол № _____.

Председатель методической комиссии _____ Фейгин А.М.