МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДЕНО
решением президиума ученого совета ННГУ
протокол от
«20» апреля 2021 г. № 1

Рабочая программа дисциплины

Комбинаторный анализ

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность образовательной программы
Прикладная математика и информатика (общий профиль)

Квалификация (степень)
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Нижний Новгород

2018

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) вариативная часть	Дисциплина Б1.В.ДВ.09.02 «Комбинаторный анализ» относится к вариативной части ОПОП направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Дисциплина «Комбинаторный анализ» Б1.В.ДВ.09.02 относится к дисциплинам по выбору вариативной части ОПОП бакалавриата по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Преподаётся в 7 семестре.

Целями дисциплины «Комбинаторный анализ» являются:

- ознакомление студентов с понятиями и фактами, являющимися основой современного комбинаторного анализа и играющими важную роль в ее приложениях;
- приобретение навыков математического моделирования различных процессов и закономерностей реального мира;
- воспитание у студентов математической культуры;
- формирование математического мышления;
- развитие способностей к самоорганизации и самообразованию.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
ОК-1 ***способность использовать основы философских знаний для формирования мировоззренческой позиции (Завершающий этап)***	***УМЕТЬ*** *У1(ОК-1) воспринимать, обобщать и анализировать информацию;* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ОК-1) математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры.*
ПК-2 ***способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат (Завершающий этап)***	***ЗНАТЬ*** *З1(ПК-2) основные понятия и утверждения дисциплины «Комбинаторный анализ»:* *• описание основных комбинаторных объектов;* *• функциональное представление комбинаторных объектов;* *• производящие функции;* *• рекуррентные соотношения;* *• метод решета;* *• комбинаторику частично упорядоченных множеств;* *• комбинаторику групп.* ***УМЕТЬ***

	У1(ПК-2) пользоваться базовыми методами комбинаторики (правила суммы и произведения, метод включения и исключения, раскрытие линейных рекуррентных соотношений); *У2(ПК-2) иметь представление о более сложных методах комбинаторики, таких, как обращение Мёбиуса, теория Пойа.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ПК-2) навыками решения прикладных комбинаторных задач, включая задачи из алгебры (теория групп, многочлены, комплексные числа), математического анализа (разложение функций в степенные ряды, гиперболические функции), дифференциальных уравнений (решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами), дискретной математики (кодирование деревьев).*
ПК-3 ***способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности*** ***(Завершающий этап)***	***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ПК-3) навыками проведения анализа алгоритмических, методических и технологических проблем, возникающих при разработке информационных систем, способностью к разработке новых алгоритмических, методических и технологических решений.*
ПК-5 ***способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" и в других источниках*** ***(Завершающий этап)***	***УМЕТЬ*** *У1(ПК-5) искать информацию о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ПК-5) навыками работы с ПК и в сети «Интернет»;* *В2(ПК-5) навыками сбора и анализа данных современных научных исследований в области прикладной математики и информационных технологий.*

3. Структура и содержание спецкурса «Комбинаторный анализ»

Объем дисциплины составляет 2 зачетных единицы, всего 72 часов, из которых 33 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем:

16 часов занятия лекционного типа,

16 часов занятия семинарского типа,

1 час промежуточной аттестации;

39 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	**Всего (часы)**	В том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них	**Самостоятельная работа**

форма промежуточной аттестации по дисциплине		**Занятия лекционного типа**	**Занятия семинарского типа**	**Занятия лабораторного типа**	**Контроль**	**Всего**	**обучающегося, часы**
1.Классические комбинаторные объекты	9	2	2			4	5
2.Новые комбинаторные объекты	9	2	2			4	5
3.Функциональное представление комбинаторных объектов	7	1	1			2	5
4.Производящие функции	16	5	5			10	6
5.Метод решета	10	2	2			4	6
.Комбинаторика частично упорядоченных множеств	10	2	2			4	6
7.Комбинаторика групп	10	2	2			4	6
В т.ч. текущий контроль	2		2				
Промежуточная аттестация - Зачет							

4. Образовательные технологии

Используются образовательные технологии в форме лекций и семинарских занятий.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

5.1. Виды самостоятельной работы студентов

- Выполнение домашних практических заданий.
- Чтение справочной, методической и научной литературы.
- Подготовка к выполнению письменных контрольных работ.
- Подготовка к промежуточной аттестации в форме зачета.

Формой контроля выполнения домашних и контрольных работ является проверка правильности их выполнения. Формой контроля работы с дополнительной литературой являются дополнительные вопросы на зачете.

5.2. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов, практические задания для проведения текущего контроля

1) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986. 384 с. (42 экз.)
2) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970 (djvu) http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm
3) Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969 (djvu)

   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm

4) Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2005. 416 с. (Изд. 1-е: Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977. 368 с.) (150 экз.)
5) Сборник задач по дискретной математике. Электронное учебно-методическое пособие. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Н.Новгород, ННГУ, 2012. 80 с. http://www.unn.ru/books/met_files/alekseev.pdf

5.3. Вопросы для контроля

1. Классические комбинаторные объекты.
   1.1. Перестановки (подстановки).
   1.2. Подмножества.
      1.2.1. Биномиальная формула.
      1.2.2. Сумма биномиальных коэффициентов.
      1.2.3. Симметрия и унимодальность.
      1.2.4. Рекуррентные соотношения для биномиальных коэффициентов.
2. Новые комбинаторные объекты.
   2.1. Перестановки заданного мультимножества.
   2.2. Разбиения чисел.
      2.2.1. Упорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.
      2.2.2. Упорядоченные разбиения на любое число слагаемых.
      2.2.3. Неупорядоченные разбиения на заданное число слагаемых.
      2.2.4. Неупорядоченные разбиения на любое число слагаемых.
   2.3. Разбиения множеств.
      2.3.1. Неупорядоченные разбиения на заданное число блоков.
      2.3.2. Неупорядоченные разбиения на любое число блоков.
      2.3.3. Упорядоченные разбиения.
   2.4. Разбиения подстановок на циклы.
3. Функциональное представление комбинаторных объектов.
   3.1. Типы функций и различимость элементов.
   3.2. Таблица комбинаторных объектов.
4. Производящие функции.
   4.1. Раскрытие линейных рекуррентностей.
      4.1.1. Конкретный пример: числа Фибоначчи.
      4.1.2. Общая теория линейных однородных рекуррентностей.
      4.1.3. Система рекуррентных соотношений.
      4.1.4. Неоднородные рекуррентные соотношения.
      4.1.5. Линейное рекуррентное соотношение с переменными коэффициентами.
   4.2. Нелинейная рекуррентность (числа Каталана).
   4.3. Специальные мультимножества.
   4.4. Производящая функция для разбиений чисел.
   4.5. Экспоненциальные производящие функции.
   4.6. Перестановки мультимножеств.
   4.7. Производящие функции чисел Стирлинга 2-го рода и чисел Белла.
   4.8. Производящая функция чисел Стирлинга 1-го рода.
5. Метод решета.

5.1. Подсчет беспорядков.
5.2. Булевы функции без фиктивных аргументов.
5.3. Вычисление перманентов.

6. Комбинаторика частично упорядоченных множеств.
6.1. Основные функции, связанные с частично упорядоченным множеством.
6.2. Функция Мёбиуса.
6.3. Важнейшие примеры ЧУМ и их функции Мёбиуса.
6.4. Формула обращения Мёбиуса.

7. Комбинаторика групп.
7.1. Лемма Бернсайда.
7.2. Цикловой индекс группы подстановок.
7.3. Цикловые индексы классических групп.
7.4. Степенная группа.
7.5. Перечисление орбит степенной группы с помощью циклового индекса.
7.6. Перечисление степенной группы по весам орбит.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине,
включающий:

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Оценка уровня формирования компетенции ПК- 2

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
ЗНАТЬ *З1(ПК-2) основные понятия и утверждения дисциплины «Комбинаторный анализ»;* ***УМЕТЬ*** *У1(ПК-2) пользоваться базовыми методами комбинаторики;* *У2(ПК-2) иметь представление о более сложных методах комбинаторики, таких, как обращение Мёбиуса, теория Пойа.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ПК-2) навыками решения прикладных комбинаторных задач, включая задачи из алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, дискретной математики.*	Наличие грубых ошибок в восприятии основного материала, отсутствие умений и навыков, предусмотренных данной компетенцией.	Низкий уровень формирования компетенции «Не зачтено»
	Уметь *У1(ПК-2), У2(ПК-2)* с рядом негрубых ошибок. **Владеть** навыками решения стандартных комбинаторных задач.	Удовлетворительный уровень формирования компетенции «Зачтено»

Оценка уровня формирования компетенции ПК- 3

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
ВЛАДЕТЬ *В1(ПК-3) навыками проведения анализа алгоритмических, методических и технологических проблем, возникающих при разработке информационных систем, способностью к разработке новых алгоритмических, методических и технологических решений.*	Отсутствие навыков, предусмотренных *В1(ПК-3).*	Низкий уровень формирования компетенции «Не зачтено»
	Владеть *В1(ПК-3).*	Удовлетворительный уровень формирования компетенции «Зачтено»

Оценка уровня формирования компетенции ПК- 5

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
УМЕТЬ *У1(ПК-5) искать информацию о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ПК-5) навыками работы с ПК и в сети «Интернет»; В2(ПК-5) навыками сбора и анализа данных современных научных исследований в области прикладной математики и информационных технологий.*	Отсутствие умений и навыков, предусмотренных данной компетенцией.	Низкий уровень формирования компетенции «Не зачтено»
	Уметь *У1(ПК-5),* **владеть** *В1(ПК-5), В2(ПК-5).*	Удовлетворительный уровень формирования компетенции «Зачтено»

Оценка уровня формирования компетенции ОК- 1

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
УМЕТЬ *У1(ОК-1) воспринимать, обобщать и анализировать информацию;* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ОК-1) математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры.*	Отсутствие умений и навыков, предусмотренных данной компетенцией.	Низкий уровень формирования компетенции «Не зачтено»
	Уметь *У1(ОК-1),* **владеть** *В1(ОК-1).*	Удовлетворительный уровень формирования компетенции «Зачтено»

Карта компетенций для оценивания умений и навыков

Индикаторы Компетен-	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудов-летвори-	«удовлет-воритель-	«хорошо»	«очень	«отлично»	«превос-

ции		тельно»	но»		хорошо»		ходно»
Умения У1(ПК-2), У2(ПК-2), У1(ПК-5), У2(ПК-5), У1(ОК-1)	Отсутствует способность решения стандартных задач	Наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	Способность решения основных стандартных задач с негрубыми ошибками	Способность решения всех стандартных задач с незначительными погрешностями	Способность решения всех стандартных задач без ошибок и погрешностей	Способность решения стандартных и некоторых нестандартных задач	Способность решения стандартных задач и широкого круга нестандартных задач.
Навыки В1(ПК-2), В2(ПК-2), В1(ПК-3) В1(ПК-5) В1(ОК-1)	Полное отсутствие навыков, предусмотрен-ных компетенцией.	Отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией.	Наличие минимально необходимого множества навыков	Наличие большинства основных навыков, продемонстрирован-ное в стандартных ситуациях.	Наличие всех основных навыков, продемонстрированных в стандартных ситуациях.	Наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях.	Наличие всех навыков, продемонстрирован-ное в стандартных и нестандартных ситуациях.

6.2. Описание шкал оценивания

Для оценивания результатов учебной деятельности студентов при изучении дисциплины «Комбинаторный анализ» за весь период обучения используется форма оценивания в форме зачета с оценкой по шкале «зачтено/не зачтено».

Индикаторы компетенции	**ОЦЕНКИ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ**	
	Не зачтено	**Зачтено**
Полнота знаний	Уровень знаний теоретического материала ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок.

Наличие умений	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с несущественными недочетами.
Наличие навыков **(владение опытом)**	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
Мотивация **(личностное отношение)**	Учебная активность и мотивация слабо выражены, готовность решать поставленные задачи качественно отсутствуют	Учебная активность и мотивация проявляются на среднем уровне, демонстрируется готовность выполнять поставленные задачи на высоком уровне качества
Характерис-тика сформиро-ванности компетенции	Компетенция в полной мере не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. Требуется повторное обучение	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения стандартных практических (профессиональных) задач.
Уровень сформиро-ванности компетенций	Низкий	Средний и выше среднего

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используется индивидуальное собеседование (на зачете) и тестирование.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются контрольные работы.

6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

Пример контрольной работы по основным и новым комбинаторным объектам (оценка формирования компетенций «ОК-1», «ПК-2»)

Вариант № 1

1. Сколько существует решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_n=k$ при заданных n и k, если все x_i равны 0 или 1? (Конкретный пример: $n=10, k=5$).

2. Сколько существует решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_n=k$ при заданных n и k, если все x_i – целые неотрицательные числа? (Конкретный пример: $n=6, k=5$).

3. Сколько существует решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_n=k$ при заданных n и k, если все x_i – натуральные числа? (Конкретный пример: $n=5, k=10$).

4. Сколько существует матриц из m строк, n столбцов с элементами из множества {0, 1}, у которых все строки различны?

5. Сколько существует упорядоченных разбиений натурального числа k на n натуральных слагаемых? Каково число аналогичных упорядоченных разбиений? (Конкретный пример: $n=4, k=8$).

6. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности k на n непустых блоков? (Конкретный пример: $n = 5$, $k = 7$).

7. Сколько существует неупорядоченных разбиений множества мощности k на любое число непустых блоков? (Конкретный пример: $k = 6$).

8. Вычислите $\left\{ {1/2 \atop k} \right\}$. (Конкретный пример: $k = 5$).

Пример контрольной работы по производящим функциям и рекуррентным соотношениям (оценка формирования компетенций «ОК-1», «ПК-2»)

Вариант № 1

1**.** Постройте производящую функцию для мультимножеств в универсе $\{0,1,2\}$, в которых элемент i входит любое число раз $k \equiv i \pmod 3$. Найдите количество таких мультимножеств мощности 0, 3 и 9, выпишите все соответствующие мультимножества.

2. Какая числовая последовательность порождается производящей функцией $f(z)=1+z+z^2$?

3**.** Раскройте линейную рекуррентность $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$, если $a_1=1, a_2=1$.

4. Сколько существует евклидово неизоморфных деревьев с m ребрами? (Конкретные примеры: $m = 3$, $m = 5$).

Пример контрольной работы по методу решета (оценка формирования компетенций «ПК-3», «ПК-5»)

Вариант № 1

1. Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы слова ТАРАКАН ?

2. В группе переводчиков из 13 человек каждый знает хотя бы один из трех языков – английский, немецкий, французский. При этом

английский язык знают 10 переводчиков,

немецкий язык знают 7 переводчиков,

французский язык знают 6 переводчиков,

английский и немецкий знают 5 переводчиков,

английский и французский знают 4 переводчика,

немецкий и французский знают 3 переводчика.

Сколько переводчиков знают все три языка ?

Сколько переводчиков знают в точности два языка?

В точности один язык?

3. Сколько существует натуральных чисел $\leq n$, взаимно простых с n ? (Конкретный пример: $n = 100$).

4. Сколько делителей существует у натурального числа n ? (Конкретный пример: $n = 100$).

5. Какие перестановки называются беспорядками? Сколько существует беспорядков из n элементов? (Конкретный пример: $n = 6$).

6. Вычислите перманент матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Подсчитайте количество булевых функций от четырех переменных, у которых все переменные являются существенными.

Пример типовых тестовых заданий для оценивания формирования компетенции ПК-2

Вариант 1

1. Что из перечисленного ниже является синонимом слова СОЧЕТАНИЕ ?

1) подмножество 2) кортеж 3) разбиение 4) независимый цикл

2. Чему равно число размещений из 6 по 3?

1) 10 2) 20 3) 60 4) 120

3. Чему равно число сочетаний с повторениями из 3 по 5?

1) 0 2) 1 3) 10 4) 21

4. Граф имеет n вершин и m ребер. Сколько у него различных остовных подграфов?

1) 2^n 2) 2^m 3) $m + n$ 4) mn

5. Какие корни имеет характеристическое уравнение линейного рекуррентного соотношения $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$?

1) 1 кратности 2 2) 1 и 4 3) 1 и -4 4) -1 и 4

6. Сколько существует нечетных простых чисел, не превосходящих 20?

1) 5 2) 7 3) 8 4) 10

7. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 30 и взаимно простых с 30?

1) 5 2) 7 3) 8 4) 10

8. Сколько делителей существует у числа 64?

1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

9. Сколько существует беспорядков из трех элементов?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014.
http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest_stud%202014.pdf
Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 г. №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

6) Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986. 384 с. (42 экз.)
7) Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963 (djvu)

   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm
8) Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970 (djvu)
   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm

б) Дополнительная литература:

1) Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969 (djvu)

   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm
2) Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977 (djvu)

   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm
3) Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1965 (djvu)

   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm
4) Холл М. Комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963 (djvu)

   http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/other.htm

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ. Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Автор: _____ к.ф.-м.н., доц. Сорочан С. В.

Рецензент (ы) _____

Заведующий кафедрой АГиДМ: _____д.ф.-м.н., проф. Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики
от 24.02.2021 года, протокол № 5.