

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий математики и механики

---

УТВЕРЖДАЮ:

Директор \_\_\_\_\_ В.П. Гергель

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

**Рабочая программа дисциплины (модуля)  
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

**бакалавриат**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**Системный анализ, исследование операций и управление**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)

**бакалавр**

(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения

**очно-заочная**

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2018

## **1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП**

Дисциплина «Методы оптимизации» читается в седьмом семестре бакалавриата (Б1.В.13.– вариативная часть)

Учебный материал хорошо согласуется с учебным планом подготовки бакалавра по направлению «Прикладная математика и информатика». Эта дисциплина изучается на основе достигнутого уровня формирования компетенций при изучении ряда базовых дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дискретная математика», «Дифференциальные уравнения», «Численные методы», а также обязательной дисциплины вариативной части «Линейное программирование». Результаты изучения дисциплины используются при освоении обязательных дисциплин вариативной части: «Системный анализ», «Теория управления». Важной особенностью дисциплины является то обстоятельство, что ее материал предоставляет базовые алгоритмические основы численного решения оптимизационных задач, возникающих в различных прикладных областях. Формирование компетенций приобретает окончательное завершение в ходе прохождения учебной и производственной практик, а также в ходе итоговой государственной аттестации.

**Целями освоения дисциплины являются:**

Целями освоения дисциплины «Методы оптимизации» являются развитие и закрепление компетенций на основе знаний, умений и навыков, связанных с теорией и применением оптимизационных подходов к задачам различных типов, относящихся к области профессиональной деятельности бакалавров, соотнесенных с общими целями ОПОП (Основная профессиональная образовательная программа) по данному направлению подготовки.

Оптимизация и, в частности, оптимальное управление относятся, в соответствии ФГОС к объектам профессиональной деятельности бакалавров направления подготовки «Прикладная математика и информатика». Предметная область, охватываемая данной дисциплиной, непосредственно входит в сферу основных направлений профессиональной деятельности бакалавров по данному направлению, которая, в частности, включает:

- проектную и производственно-технологическую деятельность:
  - исследование математических методов, включая применение методов оптимизации по тематике выполняемых научно-исследовательских работ или опытно-конструкторских;
  - разработку и исследование алгоритмов и вычислительных моделей, в частности, в области применения оптимизационных подходов и методов, включая применение в сфере создания новых вычислительных сервисов;
  - разработку архитектуры, алгоритмических и программных решений в сфере прикладного программного обеспечения, в частности, реализации эффективных методов оптимизации для конкретных предметных областей;
- научную и научно-исследовательскую деятельность:
  - изучение научной и учебной литературы по предметной области, включая теоретические основы и концепции разработки вычислительных методов эффективного решения конечномерных и бесконечномерных оптимизационных задач на основе использования информации об их структуре и свойствах, а также, в области вычислительных методов, наиболее полного использования информации об испытаниях критериев качества, описывающих прикладную задачу;

- применение наукоемких оптимизационных технологий и основанных на их использовании пакетов программ при исследовании конкретных прикладных задач из областей экономики, биологии, физики, техники и т.д.;
- развитие и применение вычислительных технологий, включая параллельные вычисления, связанных с эффективным применением вычислительных методов оптимизации;
- исследование и разработка математических моделей, алгоритмов, методов и программного обеспечения: овладение теорией и общей концептуальной базой применения оптимизационных подходов, являющейся одной из фундаментальных основ разработки новых инженерных решений, решений в области алгоритмического и программного обеспечения, являющегося основой решения прикладных оптимизационных задач.

Теория и методы численной оптимизации являются интенсивно развивающимися разделами современной науки, лежащими на стыке фундаментальной и вычислительной математики. Численные методы решения различных классов задач оптимизации, возникающие как конечный результат в данной области, широко востребованы в практике экономических, финансовых, инженерных расчетов в различных прикладных областях, включая наукоемкую сферу информационных технологий. Знание теоретических аспектов методов оптимизации создает необходимую основу для разработки новых эффективных численных методов, а также предоставляет методы аналитического анализа.

Программа дисциплины включает базовый теоретический и алгоритмический материал по разделам, связанным с оптимизацией на множествах конечномерного пространства, так и по задачам оптимизации в функциональных пространствах.

Дисциплина «Методы оптимизации» входит базовую часть профессионального цикла учебного плана по прикладной математике и информатике. Содержит основной материал по терминологии, теории условий оптимальности и теоретическим принципам построения численных методов для основных типов конечномерных нелинейных экстремальных задач, а также содержит базовый материал по терминологии, теории условий оптимальности и методам аналитического решения для некоторых классов задач оптимизации в функциональных пространствах. Практические занятия направлены на развитие у студентов навыков постановки, анализа и решения таких задач.

Неформальная цель изучения дисциплины состоит в том, чтобы сформировать у обучающихся ясное понимание основных концепций и возможностей оптимизационных подходов к постановке и решению различных прикладных задач, а также обеспечить владение численными методами анализа возникающих оптимизационных постановок, привить навыки теоретического анализа, практического получения и интерпретации результатов применения вычислительных методов оптимизации для принятия оптимальных решений, навыки использования математических пакетов для решения и анализа задач, развить навыки аналитического решения и анализа.

Преподавание дисциплины направлено на решение следующих задач обучения:

- развитие навыков в постановке прикладных задач как задач оптимизации, включая многокритериальные задачи;
- усвоение основных понятий и фактов из выпуклого анализа;
- овладение основами и подходами теории условий оптимальности для различных типов задач (принципа Беллмана для задач динамического программирования, условий Лагранжа и Каруша–Куна–Таккера для задач математического программирования, принципа максимума Л.С. Понtryгина в задачах оптимального управления, необходимых условий экстремума в задачах вариационного исчисления);
- освоение терминологии в области теории и методов вычислительной оптимизации;

- теоретическое и практическое освоение основных принципов построения вычислительных методов поиска локальных экстремумов для задач конечномерной нелинейной локальной оптимизации с ограничениями и без ограничений;
- получение навыков использования математических пакетов при решении и анализе задач оптимизации;
- теоретическое и практическое освоение методов многоэкстремальной оптимизации с ограничениями и без ограничений;
- развитие практических умений в программной реализации и применении вычислительных методов оптимизации к решению конкретных задач, а также их теоретическом анализе.

Изучение дисциплины дает навыки постановки задач из различных предметных областей как задач оптимизации, создает необходимую теоретическую базу для математически грамотного аналитического анализа, построения и применения вычислительных методов локальной и многоэкстремальной оптимизации к решению различных прикладных задач, включая применения в научной сфере развития современных информационных технологий. Таким образом, дисциплина отвечает основным целям и задачам подготовки студентов по направлению «Прикладная математика и информатика».

## **2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)**

Изучение дисциплины «Методы оптимизации» приводит к повышению уровня овладения рядом компетенций, приведенных в таблице:

<b>Формируемые компетенции</b>  (код компетенции, уровень освоения – при наличии в карте компетенции)	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций</b>
<i>ОПК-1 — способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой <u>(завершающий (высокий) этап)</u></i>	<b>Уметь:</b> <i>У1 (ОПК-1) применять базовые знания естественных наук, математики и информатики</i> <b>Знать:</b> <i>З1 (ОПК-1) основные факты из математического анализа, геометрии и алгебры и других дисциплин, на которые опирается изучение методов оптимизации</i> <b>Владеть:</b> <i>B1 (ОПК-1) математическим мышлением, математической культурой</i> <i>B2 (ОПК-1) способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на тему предметной области</i> <i>B3 (ОПК-1) основными приемами проведения математических доказательств</i>
<i>ПК-1 — способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям <u>(завершающий (высокий) этап)</u></i>	<b>Уметь:</b> <i>У1 (ПК-1) интерпретировать новую информацию в предметной области</i> <b>Владеть:</b> <i>B1 (ПК-1) навыками поиска информации в рамках предметной области в сети Интернет и других источниках.</i> <i>B2 (ПК-1) навыками использования универсальных математических пакетов для выполнения оптимизационных расчетов;</i> <i>B3 (ПК-1) навыками интерпретации результатов численного исследования экстремальных задач.</i>

	<p><b>Знать:</b> 31 (ПК-1 способы сбора и обработки научных данных и их интерпритации</p>
<i>ПК-2 — способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат (<u>завершающий (высокий) этап</u>)</i>	<p><b>Уметь:</b></p> <p>У1 (ПК2) решать математические задачи и проблемы из области методов оптимизации, аналогичные ранее изученным:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. выполнять математическую постановку задач оптимизации;</li> <li>2. строить вычислительные схемы решения задач динамического программирования с помощью уравнений Беллмана;</li> <li>3. использовать методы сверток в задачах многокритериальной оптимизации;</li> <li>4. находить решения задач математического программирования, имеющих простое аналитическое описание, с использованием условий Каруша-Куна-Таккера;</li> <li>5. выбирать эффективные вычислительные методы решения нелинейных задач оптимизации различного типа и правильно интерпретировать полученные результаты.</li> <li>6. применять универсальные математические пакеты для выполнения оптимизационных расчетов;</li> <li>7. применять принцип максимума для аналитического решения простых задач оптимального управления;</li> <li>8. применять уравнение Эйлера и его обобщения, а также условия трансверсальности и условие Лежандра для решения задач вариационного исчисления.</li> </ol> <p>У2(ПК2) доказывать ранее изученные в рамках дисциплины математические утверждения;</p> <p>У3(ПК2) проводить доказательства математических утверждений не аналогичных ранее изученным, но тесно примыкающих к ним;</p> <p>У4(ПК2) решать математические задачи и проблемы в области методов оптимизации, аналогичные ранее изученным, но более высокого уровня сложности;</p> <p>У5(ПК2) решать математические задачи, которые требуют некоторой оригинальности мышления.</p> <p><b>Знать:</b></p> <p>31 (ПК2) основные принципы, факты, понятия, аналитические и численные методы, изучаемые в дисциплине:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. принцип Р.Беллмана, структуру рекуррентных уравнений Р.Беллмана;</li> <li>2. понятие оптимальности для задач векторной оптимизации;</li> <li>3. основные понятия и факты из выпуклого анализа, включая свойства выпуклых функций;</li> <li>4. запись условий оптимальности для различных типов задач математического программирования: условия Лагранжса, Каруша-Куна-Таккера, достаточные условия второго порядка и их роль в построении численных методов;</li> <li>5. классические и эффективные вычислительные методы одномерной, многомерной локальной и глобальной оптимизации и условия их применимости;</li> <li>6. методы учета ограничений в локальной и многоэкстремальной оптимизации.</li> <li>7. принцип максимума Л.С. Понtryagina в задачах оптимального управления;</li> <li>8. необходимые условия экстремума в простейших задачах вариационного исчисления</li> </ol> <p>32 (ПК2) дополнительных принципов, фактов, понятий, методов из предметной области</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p>В1 (ПК-2) терминологией предметной области;</p> <p>В2 (ПК-2) принципами построения и выбора эффективных</p>

	численных методов решения нелинейных задач оптимизации; ВЗ (ПК-2) приемами аналитического решения задач из различных разделов методов оптимизации и интерпретации результатов
--	---

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Структура дисциплины

Объем дисциплины составляет

5 зачетных единиц, всего 180 часа, из которых

50 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем:

32 часов занятия лекционного типа,

16 часов занятия семинарского типа (научно-практические занятия),

2 часа мероприятия промежуточной аттестации

130 часов составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. включая 36 часов подготовки к экзамену).

#### 3.2. Содержание дисциплины

##### 3.2.1. Сводная таблица содержания дисциплины

Все виды занятий, указанные в таблице, проводятся в очно-заочной форме.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины*	Всего (часы)	В том числе			Самост. работа студента, часы
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	
Форма промежуточной аттестации по дисциплине					
Раздел 1. Введение: постановки задач нелинейного математического программирования, многокритериальные задачи. Динамическое программирование	30	4	6	10	20
Раздел 2. Элементы выпуклого анализа. Теория условий оптимальности.	32	8	4	12	20
Раздел 3. Численные методы безусловной локальной оптимизации.	28	6	2	8	20
Раздел 4. Методы учета функциональных ограничений в локальной оптимизации.	19	4	1	3	16
Раздел 5. Численные методы многоэкстремальной оптимизации	15	4	1	5	10
Раздел 6. Задачи и методы оптимального управления	23	2	1	3	20
Раздел 7. Задачи и методы вариационного исчисления	29	4	1	5	24
<b>В т.ч. текущий контроль</b>	<b>2</b>				
<b>Промежуточная аттестация: экзамен</b>					

\*Краткое содержание разделов дисциплины приведено под таблицей в п.3.2.2.

### 3.2.2. Краткое содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Введение: постановки задач нелинейного математического программирования. Динамическое программирование

#### 1.1. Вводная часть

Предмет дисциплины. Классификация задач оптимизации, различные трактовки понятия решения..

#### 1.2. Динамическое программирование.

Математические модели задач динамического программирования с дискретным временем. Принцип Р.Беллмана в форме необходимого и в форме достаточного условия. Вывод рекуррентных уравнений Р. Беллмана.

Раздел 2. Элементы выпуклого анализа. Теория условий оптимальности

#### 2.1. Постановка задачи математического программирования

Общая постановка задачи математического программирования. Целевая функция, функции ограничений, допустимая область. Понятия локального и глобального экстремумов. Геометрическое представление задачи: поверхность равного уровня, градиент и его свойства. Производная по направлению, конус направлений строгого локального убывания дифференцируемой функции.

#### 2.2. Элементы выпуклого анализа (элементы теории выпуклых множеств и функций)

Выпуклое множество, проекция точки на множество, отделимость точки и множества. Свойства проекции точки, теоремы отделимости. Выпуклые (вогнутые) функции, их свойства. Критерии выпуклости дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых функций. Задача выпуклого математического программирования. Ее свойства.

#### 2.3. Условия оптимальности в задачах математического программирования

Необходимые условия экстремума в гладкой задаче без ограничений (теорема Ферма) и задаче с ограничениями–равенствами (теорема Лагранжа), функция Лагранжа. Регулярность допустимой области, достаточное условие регулярности в задаче с гладкими ограничениями–равенствами.

Выпуклые задачи математического программирования. Функция Лагранжа. Достаточное условие регулярности Слейтера. Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме.

Общая гладкая задача математического программирования. Обобщение теоремы Каруша-Куна-Таккера. Достаточное условие регулярности допустимой области в точке в терминах линейной независимости набора градиентов.

Раздел 3. Численные методы безусловной локальной оптимизации

#### 3.1. Понятие метода поисковой оптимизации, модель задачи оптимизации

Понятие численного метода оптимизации. Роль априорной информации. Классификация методов. Пассивные и последовательные алгоритмы. Методы второго, первого порядков, методы прямого поиска.

#### 3.2. Принцип наилучшего гарантированного результата, оптимальность алгоритма

Принцип наилучшего гарантированного результата. Оптимальные и  $\varepsilon$ –оптимальные алгоритмы. Вывод оптимальных и  $\varepsilon$ –оптимальных пассивных и последовательных N–шаговых алгоритмов для унимодальной модели функции на отрезке. Метод Фибоначчи. Метод золотого сечения и их взаимосвязь. Методы дихотомии.

#### 3.3. Методы поиска безусловного локального минимума

Градиентные методы, метод Ньютона, их свойства. Метод прямого поиска Хука–Дживса.

Раздел 4. Методы учета функциональных ограничений в локальной оптимизации

Классификация методов учета ограничений. Обзор методов сведения задачи с ограничениями к задачам без ограничений. Метод штрафных функций.

Раздел 5. Численные методы многоэкстремальной оптимизации

Проблемы многоэкстремальной оптимизации. Класс липшицевых функций и его свойства. Метод Пиявского . Оценивание константы Липшица.

Раздел 6. Оптимальное управление

Постановка задачи оптимального управления с закрепленными концами. Класс допустимых управлений. Оптимальное управление как оптимальная программа и задача синтеза оптимального управления.

Вывод уравнения Беллмана для задачи оптимального управления. Необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина. Связь принципа максимума и принципа Беллмана. Линейная задача об оптимальном быстродействии. Условие общности положения. Принцип максимума для линейной задачи об оптимальном быстродействии.

Раздел 7. Вариационное исчисление

Простейшие задачи вариационного исчисления. Задачи с закрепленными концами. Вывод необходимых условий экстремума в простейших задачах. Уравнение Эйлера и граничные условия.

#### **4. Образовательные технологии**

В процессе изучения дисциплины при проведении занятий различных видов используются разные формы образовательные технологии. А именно, занятия проводятся в виде: лекций с различными форматами проведения, научно-практических занятий в частично семинарской форме, групповых и индивидуальных консультаций по теории, внеаудиторной самостоятельной работы студентов, консультаций по индивидуальным заданиям, включая дистанционные консультации. Используются: информационные технологии для дистанционной проверки заданий, работа с материалами, размещенными в Интернет. Занятия лекционного типа составляют около 30% от общего объема часов контактной работы со студентами по данной дисциплине. Научно-практические занятия в основной своей части проводятся в интерактивной форме.

Для поддержки курса разработан ряд учебно-методических пособий.

При самостоятельной работе и при подготовке к промежуточной аттестации в форме экзамена студенты имеют доступ к методическим материалам курса, размещенным на сайте кафедры ТУИДС института ИТММ по электронному адресу <http://www.itmm.unn.ru/tuds/materialy/>, а также на сайте ННГУ по электронному адресу <http://www.unn.ru/e-library/aids.html?pscience=6&posdate=2007>, режим доступа – свободный.

#### **5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Ниже приводятся виды самостоятельной работы студентов, порядок их выполнения и контроля, приводится учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы по ее отдельным видам и разделам дисциплины.

### **Виды самостоятельной работы студентов:**

- проработка теоретического материала лекционных занятий;
- подготовка домашних заданий к научно-практическим занятиям;
- подготовка к выполнению письменных контрольных работ;
- подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

#### **5.1. Проработка теоретического материала лекционных занятий**

Выполняется самостоятельно с использованием лекционных материалов, методических материалов в виде курса лекций «Методы нелинейной оптимизации» (автор: Городецкий С.Ю.) в электронной форме, размещенного на сайте кафедры ТУиДС по адресу: <http://www.itmm.unn.ru/tuds/materialy/>. Контроль выполняется в форме проведения ежемесячного письменного экспресс - опроса по понятиям, фактам, формулировкам, выполняемого в течение 15 минут на научно-практических занятиях.

#### **5.2. Подготовка домашних заданий к научно-практическим занятиям**

Домашние задания выдаются по имеющемуся задачнику, который включает краткий теоретический материал и примеры решения задач из каждого раздела:

1. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебно-методическое пособие. / Бирюков Р.С., Григорьева С.А., Городецкий С.Ю., Павлючонок З.Г., Савельев В.П.. – Н.Новгород: ННГУ, 2010. В форме электронного документа. Режим доступа свободный

[.http://www.itmm.unn.ru/tuds/materialy/](http://www.itmm.unn.ru/tuds/materialy/)

Проверка выполнения домашних заданий проводится в начале каждого практического занятия. Используется три формы контроля: – заполнение листа самооценки степени выполнения каждого из домашних заданий; – выборочная проверка выполнения заданий у двух-трех человек из группы; – проверка в форме коллективного обсуждения у доски результатов выполнения отдельных заданий одним или двумя студентами.

#### **5.3. Подготовка к выполнению письменных контрольных работ**

В течение семестра проводится две аудиторные и две домашние контрольные работы по материалам разделов лекционного курса: 1; 2-3-4; 6; 7 (см. таблицу с описанием разделов дисциплины из п. 3.2.1).

Для подготовки к контрольным работам рекомендуется повторно прочитать теоретические разделы в задачнике, указанном в п.5.3, просмотреть полезные разделы в соответствующих источниках из списка рекомендованной литературы (раздел 7), а также самостоятельно решать несколько задач по теме контрольной работы из указанного задачника.

#### **5.4. Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена**

В качестве методических материалов при подготовке к экзамену рекомендуется использовать собственные конспекты лекций, методические материалы в виде курса лекций «Методы нелинейной оптимизации» (автор: Городецкий С.Ю.) в электронной форме, размещенного на сайте кафедры ТУиДС по адресу: <http://www.itmm.unn.ru/tuds/materialy/>, методические издания кафедры в разделе 5.2, а также источники, рекомендованные в списке литературы раздела 7.

### **Список вопросов, выносимых на экзамен**

#### **0. ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В СКАЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ**

0.1. Общая постановка однокритериальной задачи оптимизации. Понятия локально-оптимального и глобально-оптимального решений.

#### **1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

1.1. Задачи с фиксированным временем начала и окончания. Постановка. Понятие функции Беллмана (определение) при решении «от начала», а также «от конца». Метод рекуррентных уравнений Беллмана. Принцип Беллмана как необходимое условие (с доказательством для аддитивного критерия) и как достаточное условие (с доказательством) для в задачах с аддитивным Связь принципа Беллмана с уравнениями Беллмана. Обратные рекуррентные соотношения Беллмана (запись от начала процесса).

## 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1.Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгая выпуклость). Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции. Отделимость точки и множества, строгая и сильная отделимость, две теоремы об отделимости. Свойства выпуклых функций, критерии выпуклости. Задача выпуклого математического программирования и ее свойства. Возможность отсечений подмножеств, не содержащих глобального минимума, по измерениям градиента в гладких выпуклых задачах.

2.2. Градиент и производная по направлению, ее вычисление, свойства градиента. Условие оптимальности первого порядка при отсутствии ограничений: теорема Ферма. Задачи с ограничениями, функция Лагранжа. Запись условий экстремума первого порядка в задачах математического программирования. Определение понятия регулярности допустимого множества в точке и в целом. Теоремы об условиях оптимальности: теорема Лагранжа (для гладкой задачи с ограничениями–равенствами); теоремы о необходимых и достаточных условиях минимума в дифференциальной форме для класса выпуклых регулярных задач; теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме для невыпуклых задач (без доказательства). Геометрическая интерпретация условий оптимальности, записанных в градиентной форме для теоремы Лагранжа и Каруша-Куна-Таккера. Геометрическая интерпретация ситуации  $\lambda_i < 0$  при разложении антиградиента целевой функции в выпуклой задаче при неверной гипотезе о наборе активных неравенств.

Достаточные условия регулярности для допустимых множеств разных типов: условия регулярности в точке, записанные в градиентной форме для задач с гладкими равенствами; аналогичные условия для задач с гладкими равенствами и неравенствами; условие регулярности Слейтера для допустимого множества и условия его применимости.

2.3. Понятие метода поисковой оптимизации. Испытание и порядок испытания. Априорная и поисковая информация. Пассивные и последовательные алгоритмы. Принцип наилучшего гарантированного результата. Оптимальные и  $\varepsilon$ -оптимальные алгоритмы. Одношаговая оптимальность. Класс унимодальных функций. Построение оптимальных и  $\varepsilon$ -оптимальных пассивных N-шаговых алгоритмов,  $\varepsilon$ -оптимального последовательного N-шагового алгоритма (метод Фибоначчи). Неоптимальные алгоритмы: методы золотого сечения и два варианта метода дихотомии. Связь метода Фибоначчи с методом золотого сечения.

2.4. Метод поиска глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции на выпуклом многограннике. Вид нижней оценки выпуклой функции по ее испытаниям первого порядка.

Задачи поиска локального экстремума в задачах без ограничений. Общая структура итерационных методов локального поиска. Понятие порядка метода. Линейная, сверхлинейная и квадратичная скорости сходимости (определения).

Два критерия выбора шагового множителя. Алгоритмы Армихо и одномерной минимизации. «Аккуратный» одномерный поиск. Классические методы многомерного локального поиска и их

свойства: градиентные методы, включая метод наискорейшего градиентного поиска, и метод Ньютона. Методы прямого поиска на примере метода Хука-Дживса.

2.5. Общие методы решения задач с ограничениями. Метод внешних штрафных функций, степенная функция штрафа.

2.6. Задачи многоэкстремальной оптимизации. Липшицевы функции и их свойства. Метод Пиявского. Одномерный вариант метода Пиявского — метод ломанных.

### **3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

3.1. Постановка задачи. Понятия оптимального управления, областей управляемости и неуправляемости. Функция Беллмана в задаче оптимального управления. Получение условий оптимальности в форме уравнения Беллмана для задачи оптимального управления. Теорема о необходимых условиях оптимальности управления в форме принципа максимума Понтрягина, связь принципа максимума с уравнением Беллмана.

3.2. Линейные задачи на оптимальное быстродействие.

### **4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

4.1. Простейшие задачи вариационного исчисления. Формализация понятия близости кривых. Понятие сильного и слабого локального экстремумов.

Метод вариации Лагранжа. Первая и вторая вариации. Лемма о необходимых условиях экстремума в общей форме. Экстремум и экстремаль функционала (определение экстремали). Основная лемма вариационного исчисления.

4.2. Вычисление первой вариации функционала для задач с закрепленными концами, свободными концами, а также для задач со скользящими концами. Вывод уравнения Эйлера и граничных условий как необходимых условий первого порядка для экстремума и как необходимых и достаточных условий для экстремалей в трех простейших задачах вариационного исчисления.

Общая программа сдачи экзамена на оценку «хорошо» и выше предполагает полное владение материалом, включая умение проводить выкладки и доказательства.

**Минимальные требования для сдачи экзамена на «удовлетворительно» при неспособности воспроизвести обоснование и доказательства теоретических положений материала дисциплины:**

- а— умение решать типовые практические задачи из разных разделов курса;
- б— знание определений и способность к их содержательной интерпретации;
- в— знание основных постановок задач для всех разделов курса;
- г— знание и понимание(в основном) формулировок основных свойств, лемм и теорем;
- д— описание алгоритмов и расчетных формул основных численных методов и их содержательная трактовка;
- е— умение решать типовые задачи из разных тем;
- ж—способность ответить на теоретические и практические вопросы по имеющимся задолженностям (при наличии задолженностей)

### **6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине**

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования

### **Оценивание уровня сформированности компетенции ПК-2**

Уровень формирования ПК-2, в основном, проверяется в ходе выполнения студентами *практических заданий*, как при самостоятельной домашней работе, так и на аудиторных практикумах, а также при *выполнении контрольных работ*. Завершающая проверка проводится в *ходе устного экзамена*. При использовании различных форм контроля применяются различные критерии оценивания, которые могут быть сведены в обобщенную характеристику овладения компетенцией. При этом в таблице указаны условные баллы, приблизительно показывающие соответствующую степень овладения материалом (знания, умения, навыки) по отношению к максимальному предполагаемому уровню, принимаемому за (1) – единицу и обычно соответствующему оценке «отлично».

Показатели обучения, характеризующие ПК-2 — способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Показатели уровня формирования компетенции	Характеристика уровня формирования компетенции
<b>Умения:</b> У1(ПК2) решать математические задачи и проблемы из области методов оптимизации, аналогичные ранее изученным; У2(ПК2) доказывать ранее изученные в рамках дисциплины математические утверждения; У3(ПК2) проводить доказательства математических утверждений не аналогичных ранее изученным, но тесно примыкающих к ним; У4(ПК2) решать математические задачи и проблемы в области методов оптимизации, аналогичные ранее изученным, но более высокого уровня сложности; У5(ПК2) решать математические задачи, которые требуют некоторой оригинальности мышления. <b>Знания:</b> З1 (ПК2) основных принципов, фактов, понятий, аналитических и численных методов, изучаемых в дисциплине З2 (ПК2) дополнительных принципов, фактов, понятий, методов из предметной области <b>Владение:</b> В1 (ПК-2) терминологией предметной области; В2 (ПК-2) принципами построения и выбора эффективных численных методов решения нелинейных задач оптимизации; В3 (ПК-2) приемами аналитического решения задач из различных разделов методов оптимизации и интерпретации результатов	Отсутствие знаний базового материала, отсутствие способности решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.	Плохой уровень. Соответствует доле освоения от 0 до 0,15.
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие основных навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень. Соответствует доле освоения от 0,15 до 0,34.
	Знание основных понятий, фактов и методов предметной области, но со значительным количеством ошибок не грубого характера. Демонстрация умений на уровне У1, а также частично У2 с рядом негрубых ошибок. Владение теоретическим материалом и стандартными методами на уровне В1 и В3 с непринципиальными ошибками.	Удовлетворительный уровень. Соответствует доле освоения от 0,35 до 0,59.
	Знание основных понятий, фактов и методов предметной области с рядом заметных погрешностей. Демонстрация умений на уровне У1, У2 с незначительными погрешностями, а также владения материалом на уровне В1 и В3 в стандартных ситуациях с рядом небольшими погрешностями	Хороший уровень. Соответствует доле освоения от 0,6 до 0,79.

	<p>Знание основных понятий, фактов и методов предметной области с небольшими погрешностями на уровне 31. Демонстрация умений на уровне У1,У2 практически без погрешностей, а на уровне У3, У5 с небольшими погрешностями.</p> <p>Владение материалом на уровне В1, В3 и частично на уровне В2 в стандартных ситуациях.</p>	<p>Очень хороший уровень формирования компетенции.</p> <p>Соответствует доле освоения от 0,8 до 0,89.</p>
	<p>Знание на уровне 31 по всем разделам без ошибок и погрешностей. Демонстрация умений на уровне У1,У2,У3,У5.</p> <p>Владение всеми навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях.</p>	<p>Отличный уровень формирования компетенции.</p> <p>Соответствует доле освоения от 0,9 до 0,99.</p>
	<p>Знание основного и дополнительного материала без ошибок и погрешностей.</p> <p>Демонстрация умений на уровне У1-У5. Свободное владение всеми навыками, в стандартных и нестандартных ситуациях.</p>	<p>Превосходный уровень формирования компетенции.</p> <p>Соответствует доле освоения 1 и несколько выше 1.</p>

### Оценивание уровня сформированности компетенции ОПК-1

Уровень формирования ОПК-1 проверяется на основе оценивания результатов обучения с точки зрения приобретения умений, знаний и владений, обозначенных в таблице раздела 2 как У1(ОПК1), 31(ОПК1), В1-В3(ОПК1). Проверка этих результатов обучения выполняется на занятиях различных видов: на *аудиторных практических занятиях*, при выполнении *контрольных работ*, в ходе *устного экзамена*. Специфика данной компетенции проявляется в том, что степень владения ею определяется как фактор, сопутствующий оцениванию владения компетенцией ПК-2 и, отчасти, ПК-1.

В отличие от ПК-2, характеристика уровня формирования компетенции ОПК-1 носит экспертный характер со стороны преподавателя и, следовательно, не исчисляется в баллах, а носит качественный характер. Уровень ее формирования можно охарактеризовать терминами: «недостаточный», «низкий», «умеренный», «достаточный», «высокий».

Показатели обучения, характеризующие ОПК-1 — способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанные с прикладной математикой и информатикой	Показатели уровня формирования компетенции	Характеристика уровня формирования компетенции
<b>Уметь:</b> У1 (ОПК-1) применять базовые знания естественных наук, математики и информатики <b>Знать:</b> 31 (ОПК-1) основные факты из математического анализа, геометрии и алгебры и других дисциплин, на	Отсутствие знаний базовых дисциплин, умения их применять, практически полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.	Недостаточный.
	Отрывочные знания базовых дисциплин, наличие грубых	Низкий

<p>которые опирается изучение методов оптимизации</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p><i>B1 (ОПК-1)</i> математическим мышлением, математической культурой</p> <p><i>B2 (ОПК-1)</i> способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на тему предметной области</p> <p><i>B3 (ОПК-1)</i> основными приемами проведения математических доказательств</p>	<p>ошибок при их применении, отсутствие основных навыков, предусмотренных данной компетенцией</p>	
	<p>Значительное количество ошибок не грубого характера, а также пробелы в знаниях из базовых дисциплин. Умение их применить сопровождается множественными мелкими ошибками.</p> <p>Обнаруживаются некоторые признаки математического мышления, но на достаточно низком уровне.</p>	Умеренный
	<p>Демонстрация знаний и умений категорий У1 и З1 с заметными погрешностями. Проявление навыков В1-В3 с рядом замечаний и пробелов.</p>	Достаточный
	<p>Знания и умения на уровне З1 и У1 без ошибок и погрешностей..</p> <p>Полноценное владение всеми навыками для данной компетенции..</p>	Высокий

### Оценивание уровня сформированности компетенции ПК-1

Уровень формирования ПК-1 проверяется при *самостоятельном разборе* студентами необходимого теоретического материала, а также при *выполнении индивидуальных заданий*, которые могут включать *самостоятельный поиск информации*, например, по использованию математических пакетов для визуализации и исследования оптимационных задач. Контроль уровня формирования компетенции ПК-1 выполняется как в процессе коллективного обсуждения самостоятельно разобранного теоретического материала, так и при обсуждении результатов выполнения полученных студентами индивидуальных заданий и интерпретации ими этих результатов.

Также, как и в случае оценивания ОПК-1, характеристика уровня формирования компетенции ПК-1 носит экспертный характер со стороны преподавателя и, следовательно, не исчисляется в баллах, а носит качественный характер. Уровень ее формирования можно охарактеризовать терминами: «недостаточный», «низкий», «умеренный», «достаточный», «высокий».

Показатели обучения, характеризующие ПК-1 — способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям	Показатели уровня формирования компетенции	Характеристика уровня формирования компетенции
<p><b>Уметь:</b></p> <p><i>У1 (ПК-1)</i> интерпретировать новую информацию в предметной области</p> <p><b>Владеть:</b></p> <p><i>B1 (ПК-1)</i> навыками поиска</p>	<p>Неверная интерпретация новой информации в предметной области, слабые навыки по В1, практически полное отсутствие навыков и знаний по З1, В2, В3.</p>	Недостаточный.

<p>информации в рамках предметной области в сети Интернет и других источниках.</p> <p><i>B2 (ПК-1)</i> навыками использования универсальных математических пакетов для выполнения оптимизационных расчетов;</p> <p><i>B3 (ПК-1)</i> навыками интерпретации результатов численного исследования экстремальных задач.</p> <p><b>Знать:</b></p> <p><i>31 (ПК-1)</i> способы сбора и обработки научных данных и их интерпритации</p>	Интерпретация новой информации в предметной области с грубыми ошибками, недостаточные навыки по В1, навыки по В2-3 сформированы слабо.	Низкий
	Владение В1 и В2 на приемлемом уровне, но в области У1, а также В3 обнаруживается много ошибок, но негрубого характера.	Умеренный
	Владение В1 и В2 на хорошем уровне, но в области У1, а также В3 обнаруживается некоторое количество ошибок в осознании и интерпретации новой информации и полученных результатов.	Достаточный
	Обучаемый демонстрирует необходимые умения и навыки в рамках компетенции в полном объеме.	Высокий

## 6.2. Описание шкал оценивания

Шкалы и процедуры оценивания этапов формирования компетенций при использовании различных формах контроля, а также процедуры оценивания в ходе устного экзамена представлены в разделе 6.3.

Ниже в форме таблицы приведена шкала оценивания при промежуточной аттестации в форме устного экзамена.

Оценка	Уровень подготовки
Превосходно	На экзамене обучаемый показал высокий уровень подготовки, безупречное владение теоретическим материалом, а также способность к самостоятельному доказательству новых фактов, заметно отличающихся от рассмотренных в курсе, творческий поход к разрешению нестандартных ситуаций. Имеет отличные результаты выполнения контрольных работ и тестов в семестре. Освоение материала на 100% и выше.
Отлично	Обучаемый показал достаточно высокий уровень подготовки при наличии незначительных погрешностей, способность к самостоятельному доказательству новых фактов, похожих на рассмотренные в курсе. Имеет отличные или очень хорошие результаты выполнения контрольных работ и тестов в семестре. Демонстрирует способность решать дополнительные предложенные задачи, требующие оригинальности мышления. Освоение материала на уровне 90-99%
Очень хорошо	В целом – весьма хорошая подготовка. Обучаемый дает ответы на все теоретические вопросы билета, воспроизводит стандартные доказательства, но с рядом ошибок и неточностей; может решать задачи из всех основных разделов. Освоение материала на уровне 80-90%
Хорошо	Достаточно хорошая подготовка, но с заметными ошибками или недочетами; получен полный ответ на все теоретические вопросы билета, доказательства, в целом, воспроизводятся, но с рядом ошибок. Практические задания обучаемый выполняет, но с недочетами. Освоение материала на уровне 60-79%
Удовлетворительно	Минимально достаточный уровень подготовки. Обучаемый в значительной части отвечает на все вопросы билета, но с множеством ошибок, не носящих грубого характера; не может воспроизводить стандартные доказательства; имеет задолженности или низкую оценку по лабораторному практикуму или по контрольным работам; предложенные практические задания или тесты выполняет с заметными ошибками.

	Освоение материала на уровне 35-59%.
Неудовлетворительно	Подготовка недостаточна и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы, как на теоретические вопросы билета, так и на наводящие и дополнительные вопросы экзаменатора. Как правило, имеет задолженности по контрольным работам и не может правильно решить предложенные практические задачи или теоретические тесты. Освоение материала порядка 15-34%.
Плохо	Подготовка абсолютно недостаточна. Обучаемый не отвечает на поставленные вопросы, не понимает терминологию; имеет задолженности по контрольным работам, не знает подходов к решению практических задач. Присутствуют признаки необучаемости. Освоение материала ниже 15%.

При пересчете в пятибалльную шкалу устанавливается следующее соответствие оценок.

Оценка «отлично» соответствует двум: «превосходно» и «отлично»; оценка «хорошо» – двум оценкам: «очень хорошо» и «хорошо»; оценка «удовлетворительно» соответствует оценке «удовлетворительно»; оценка «неудовлетворительно» – двум оценкам: «неудовлетворительно» и «плохо».

**6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций**

#### **Технологии оценивания результатов обучения в виде знаний и отдельных владений**

- Индивидуальное собеседование по теоретическим билетам (проводится в рамках комплексного устного экзамена, результат оценивается по семибалльной шкале) – для проверки 31 (ПК2), 32 (ПК2), 31 (ОПК1), В1(ПК2) .
- Письменные ответы на тестовые вопросы по теории (проводится в рамках письменных переэкзаменовок, результат оценивается в баллах от 0 до 5) – для проверки 31(ОПК1) и 32(ПК2), В1(ПК2).

#### **Технологии оценивания результатов обучения в виде умений и владений**

- Письменные контрольные работы с комплексными заданиями (проводятся в форме домашних контрольных работ или же аудиторных работ, оцениваются либо баллами в долях от единицы, либо оценкой от 1 до 7) – для проверки У1(ОПК1), В1(ОПК1), У5(ПК2), В3(ПК2).
- Решение простых, а также комплексных практических задач (проводится во время устного экзамена или письменной переэкзаменовки) – для проверки У1(ПК2), У4(ПК2), В3(ПК2), В1(ОПК1), В2(ОПК1)
- Проведение типовых доказательств по билету (применяется на устном экзамене, результат оценивается в баллах от 0 до 5) – для проверки У2(ПК2), В1(ОПК1), В3(ОПК1).

#### **Критерии и процедуры оценивания результатов обучения при проведении промежуточной аттестации в форме устного экзамена**

Итоговая оценка уровня овладения компетенциями по дисциплине «Методы оптимизации» в значительной части определяется в результате проведения устного экзамена. При этом учитываются результаты процедур оценивания, полученные на предварительных формах контроля, указанных выше: результаты двух контрольных работ. При этом, если по одной или нескольким указанным формам контроля студент имеет достаточно низкие результаты (а именно, менее трети от максимально возможного по данной форме), то на экзамене до ответа по билету он должен выполнить (с результатом выше указанного минимального уровня) предварительные дополнительные задания, тип которых соответствует форме его задолженности (письменные ответы на тестовые вопросы по теории, решение простых, а также комплексных практических задач). Если указанные задания на должном минимальном уровне не выполняются, на экзамене ставится оценка «плохо» или «неудовлетворительно».

Если задолженности сдаются на допустимом уровне, то студент получает билет по теории, а уровень его практических умений и навыков оценивается по уровню выполнения этих заданий допуска. Если же задолженностей по практическим занятиям не было, то уровень его практических умений и навыков оценивается по результатам форм контроля на практических занятиях в ходе обучения. Этот уровень учитывается в оценке, полученной на экзамене. Основное влияние на эту оценку оказывает ответ по полученному билету, а также ответы на дополнительные вопросы по теории и результаты решения дополнительных практических задач. Оценка экзамена носит экспертный характер и непосредственно отражает уровень сформированности компетенций, поддерживаемых дисциплиной. Оценка ставится по принятой в ННГУ семибалльной шкале, описанной в разделе 6.2.

6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

### Типовые примеры заданий для контрольных работ

Пример типового задания для контрольной работы 1 (оценка формирования ОПК1, ПК2).

1. Планируется производство на двух предприятиях в течение  $N$  лет. Сумма начальных средств в фонде развития, предназначенных для распределения равна  $S$ . Средства в размере  $u_i$ , выделенные  $i$ -му предприятию в начале очередного года, приносят за год доход  $J_i(u)$ , а также сумму  $f_i(u)$ , передаваемую в совместный фонд развития для дальнейшего финансирования производства. Средства выделяются предприятиям суммами, кратными величине  $d$  так, что средства фонда полностью делятся между предприятиями, за исключением сумм, меньших  $d$  (эти последние суммы теряются). В начале каждого следующего года средства, переданные в фонд, объединяются и заново делятся. Необходимо добиться максимального суммарного совокупного дохода, образованного из значений функций  $J$ , за счет выбора стратегии перераспределения средств.

Поставить задачу в форме задачи динамического программирования, записать вид рекуррентных уравнений Беллмана для произвольного  $N$ . Выполнить расчеты при следующих данных:  $N=3$ ,  $S=120$ ,  $f_1(u)=0.4u$ ,  $f_2(u)=0.6u$ ,  $d=20$ .

$u$	0	20	40	60	80	100	120
$J_1(u)$	0	5	8	12	14	15	16
$J_2(u)$	0	3	5	8	12	14	15

Пример типовых заданий для контрольной работы 2 (оценка формирования ОПК1, ПК2)

МП-1. Определить тип задачи, выяснить регулярность области.

Найти решение.

$$\begin{aligned} \min & x^2 + (1/2)y^2 + z^2 + (x + y)z - \\ & 2x - z \\ & 7 + y + z \geq 0 \\ & x + z \geq 5 \\ & 2x + y + z + 1 \geq 0 \\ & 4z - x \geq 10 \end{aligned}$$

МП-2. Привести (в геометрической форме представления) пример гладкой задачи с ограничениями-равенствами, где существует точка, удовлетворяющая условиям Лагранжа, но не являющаяся ни локальным минимумом, ни максимумом.

$$\underline{x + y + 2z = 1}$$

Пример типового задания для контрольной работы 3 (оценка формирования ОПК1, ПК2)

1. Найти область управляемости и осуществить синтез оптимальных управлений в задаче о быстрейшем попадании в начало координат для линейной системы  $\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = u(t)$ , где  $-1 \leq u(t) \leq +1$ , в следующих случаях: (а)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ; (б)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ; (в)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ; (г)  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ ; (д)  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$ .

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 2h\lambda + k = 0$ .

При решении задачи самостоятельно выбрать значения коэффициентов  $h$  и  $k$  при которых будут обеспечены указанные типы значений корней характеристического полинома.

Пример типовых заданий для контрольной работы 4 (оценка формирования ОПК1, ПК2)

1. Найти экстремали функционалов, выяснить, может ли на этих экстремалах достигаться минимум (максимум) функционала:

а  $I[y(\cdot)] = \int_1^\ell (xy'^2 + yy')dx; \quad y(1) = 0, \quad y(\ell) = 1.$

б  $I[y(\cdot)] = \int_a^b (2xy + (x^2 + e^y)y')dx; \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$

в  $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (e^y + xy')dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = a.$

г  $I[y(\cdot)] = \int_0^\pi (y'^2 - y^2)dx; \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1.$

д  $I[y(\cdot)] = \int_0^1 (2e^y - y^2)dx; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$

е  $I[y(\cdot)] = \int_0^{x_1} (1+x)y'^2dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) + x_1 = 2.$

Результаты контрольных работ оцениваются дробными баллами от 0 до 1 за решение каждой задачи. Затем сумма баллов за отдельные задачи пропорционально пересчитывается в общую оценку от 0 до 5.

## **Примеры экзаменационных билетов**

(оценка формирования ОПК1, ПК2)

---

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет

им. Н.И. Лобачевского

Институт ИИТММ

Кафедра ТУ и ДС

Дисциплина Методы оптимизации – ПМИ

### **ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1**

1. Теорема Каруша–Куна–Таккера в дифференциальной форме для выпуклой регулярной задачи.

Геометрическая интерпретация ситуации  $\lambda_i < 0$  при разложении антиградиента целевой функции в выпуклой

задаче при неверной гипотезе о наборе активных неравенств.

2. Неоптимальные алгоритмы: методы золотого сечения и два варианта метода дихотомии. Связь метода Фибоначчи с методом золотого сечения.

3. Задачи

Зав.кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_

---

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет

им. Н.И. Лобачевского

Институт ИИТММ

Кафедра ТУ и ДС

Дисциплина Методы оптимизации – ПМИ

### **ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2**

1. Теоремы об условиях оптимальности: теорема Лагранжа (для гладкой задачи с ограничениями–равенствами)

2. Вывод необходимых условий экстремума первого порядка в простейшей задаче вариационного исчисления с закрепленными концами (включая вывод формулы для первой вариации применительно к задаче этого типа).

3. Задачи.

Зав.кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_

---

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет

им. Н.И. Лобачевского

Институт ИИТММ

Кафедра ТУ и ДС

Дисциплина Методы оптимизации – ПМИ

### **ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3**

1. Понятие выпуклой, строго выпуклой функции. Критерий выпуклости дифференцируемой функции.

---

2. Два критерия выбора шагового множителя. Алгоритмы Армихо и одномерной минимизации. «Аккуратный» одномерный поиск.

3. Задачи.

Зав.кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_

---

### Примеры практических задач на экзамене (оценка формирования ОПК1, ПК2)

1. Задача из раздела «оптимальное управление»

Судно массы  $m=1$  совершает поступательное одномерное движение под действием двигателя, развивающего усилие  $u(t)$ , и испытывает сопротивление со стороны окружающей воды, равное скорости движения с обратным знаком. Усилие, развиваемое двигателем, ограничено по величине:  $u(t) \in [-1, 1]$ . Решить задачу синтеза управления, мягко (с нулевой скоростью) приводящего судно в точку с координатой 0 за минимальное время. Точка причаливания находится на прямой, вдоль которой перемещается судно.

2. Задача из раздела «оптимальное управление»

Построить область управляемости и синтезировать оптимальное по быстродействию управление в начало координат для управляемой динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений:

$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}u(t)$ , где вектор  $u(t)$  принимает значение на отрезке, соединяющем точки  $(-1, -2)$  и  $(1, 2)$ .

3. Задача из раздела «условия оптимальности в задачах математического программирования»

Выполнить анализ типа задачи, найти глобальный минимум:

$$\min 30y - 18xy - 10x + 11(x^2 + y^2)$$

$$1 + y \geq 0$$

$$x - 4y \leq -5$$

$$3x - y \leq -4$$

4. Задача из раздела «вариационное исчисление»

Найти экстремали в изопериметрической задаче на минимум функционала  $\min \int_0^\pi x \sin(t) dt$  при ограничениях  $x(0) = 0$ ,  $x(\pi) = \pi$  и дополнительном условии  $\int_0^\pi \dot{x}(t) dt = 3\pi$ .

### 6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. №55-ОД,

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

## **7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) основная литература:**

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Учебное пособие – 2-е изд. перераб. и доп. – М.:Наука,1988. (220 экз.)
2. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Учебное пособие. Н.Новгород: изд-во ННГУ, 2007. – 489 с. (81экз.)
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. Учебное пособие. – М.: Физматлит, 1986 или 2008. (136 экз.)
4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления – М.:Наука, 1969. (38экз.)
5. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз,1961. — В форме электронного документа на сайте EdWorld «Мир математических уравнений», ИПМ РАН, 2004-2016, URL: режим доступа свободный  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm> .
6. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. М.:Наука, 1973. — В форме электронного документа на сайте EdWorld «Мир математических уравнений»/ ИПМ РАН, 2004-2016, URL: режим доступа свободный  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm>

### **б) дополнительная литература**

1. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация.– М.: Мир, 1985. (45 экз).
2. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, ННГУ, 2008. (14 экз.)
3. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. 2-е издание. — М.: Наука, 2011. – Электронная библиотечная система «Издательства Лань», 2016, URL: режим доступа <https://e.lanbook.com>
4. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации: Учеб. Пособие. 2-е переработанное издание – М.: Физматлит, 2008. – Электронная библиотечная система «Издательства Лань», 2016, URL: режим доступа <https://e.lanbook.com>
5. Курант Р.,Гильберг Д. Методы математической физики,т.1, – М.:ГИТТЛ,1951. — В форме электронного документа доступна на сайте EdWorld «Мир математических уравнений», ИПМ РАН, 2004-2016, URL: режим доступа <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>

### **в) Интернет-ресурсы**

1. EqWorld. Мир математических уравнений / Разработчик – А. Д. Полянин. – М.: ИПМ РАН, 2004-2014. Электронный ресурс, содержащий электронные версии книг по вариационному исчислению в свободном доступе:  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm>
2. Электронная библиотечная система «Издательство Лань», 2016, URL: режим доступа  
<https://e.lanbook.com>

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет». Наличие рекомендованной литературы

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению «01.03.02 Прикладная математика и информатика» (профиль «Системный анализ, исследование операций и управление»).

Автор к.ф.-м.н., доц. каф. ТУиДС \_\_\_\_\_ Губина Е.В.

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой ТУиДС, д.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Осипов Г.В.

Программа одобрена на заседании методической комиссии Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского  
от \_\_\_\_\_ года, протокол № \_\_\_\_\_.