

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт аспирантуры и докторантуры

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением ученого совета ННГУ
протокол от
« 31 » августа 2021 г. № 11

Рабочая программа дисциплины (модуля)

**Приближенные методы решения
дифференциальных уравнений**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

**Подготовка кадров высшей
квалификации**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.06.01 Математика и механика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)

**Исследователь. Преподаватель-
исследователь**

(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2021

1. Место дисциплины (модуля) в структуре основной профессиональной образовательной программы ОПОП

Дисциплина относится к вариативной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» (Б1.В.01.03), является дисциплиной по выбору обучающегося, предназначена для освоения на 2-3 году обучения в аспирантуре по специализации «01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» в 4 и 5 семестрах. Изучение теории и приближенных методов решения дифференциальных уравнений весьма полезно с точки зрения основной образовательной программы (ОПОП).

При изучении современных приближенных методов решения дифференциальных уравнений в большой степени применяются многие результаты из таких, освоенных на предыдущем этапе обучения, дисциплин фундаментальной математики, как математический анализ, дифференциальные уравнения, функциональный анализ. Никакие особые требования к «входным» знаниям, умениям и готовностям обучающихся, необходимым при освоении данной дисциплины и приобретенным в результате освоения предшествующих дисциплин, не предусматриваются. Знания, полученные при освоении данной дисциплины, необходимы при практической научной работе, связанной по тематике с решением дифференциальных уравнений.

Целью освоения дисциплины «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений» является формирование у обучающихся предусмотренных учебным планом профессиональных компетенций; ознакомление обучающихся с современными методами решения задач Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, ознакомление обучающихся с основными теоретическими и практическими методами построения численных схем для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, выработка навыков решения прикладных задач на ЭВМ.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Таблица 1

Формируемые компетенции (код компетенции, уровень освоения – при наличии в карте компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций УК-1, УК-5, ОПК-1, ОПК-2, ПК-1, ПК-2, ПК-3
УК-1 <i>Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</i>	Уметь: <i>У1(УК-1)</i> анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать; потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов <i>У2(УК-1)</i> при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации, исходя из наличных ресурсов и ограничений; Знать: <i>З1(УК-1)</i> методы критического анализа и оценки современных научных достижений, а также методы генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях/ Владеть: <i>В1(УК-1)</i> навыками анализа методологических проблем,

	<p>возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</p> <p><i>B2(УК-1)</i> навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</p>
<p>УК-5 Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития</p>	<p>Уметь: <i>У1(УК-5)</i> формулировать цели личностного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, этапов профессионального роста, индивидуально-личностных особенностей <i>У2(УК-5)</i> осуществлять личностный выбор в различных профессиональных и морально-ценностных ситуациях, оценивать последствия принятого решения и нести за него ответственность перед собой и обществом</p> <p>Знать: <i>З1(УК-5)</i> содержание процесса целеполагания профессионального и личностного развития, его особенности и способы реализации при решении профессиональных задач, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда</p> <p>Владеть: <i>В1(УК-5)</i> приемами и технологиями целеполагания, целереализации и оценки результатов деятельности по решению профессиональных задач <i>В2(УК-5)</i> способами выявления и оценки индивидуально-личностных, профессионально-значимых качеств и путями достижения более высокого уровня их развития</p>
<p>ОПК-1 Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в области математики с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий</p>	<p>Уметь: <i>У1(ОПК-1)</i> анализировать примеры, формулировать гипотезы, доказывать утверждения, оформлять полученные результаты</p> <p>Знать: <i>З1(ОПК-1)</i> основные идеи, методы, результаты и актуальные проблемы исследуемой области математики</p> <p>Владеть <i>В1(ОПК-1)</i> навыками планирования исследований, поиска и анализа научной информации</p>
<p>ОПК-2 Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования</p>	<p>Уметь: <i>У1(ОПК-2)</i> планировать и организовывать учебный процесс, разрабатывать программы математических дисциплин (модулей)</p> <p>Знать: <i>З1(ОПК-2)</i> материал математических дисциплин, входящих в основные образовательные программы высшего образования, и современные методики преподавания</p> <p>Владеть: <i>В1(ОПК-2)</i> навыками преподавания математических дисциплин</p>
<p>ПК-1 Способность получать новые научные и прикладные результаты в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального</p>	<p>Уметь: <i>У1(ПК-1)</i> анализировать известные результаты по теме исследования, формулировать гипотезы, доказывать утверждения, оформлять полученные результаты</p> <p>Знать: <i>З1(ПК-1)</i> специализированные разделы дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления,</p>

управления	необходимые при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях Владеть: В1(ПК-1) специализированными методами и результатами, профессиональными пакетами программ, применяемыми при исследовании в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления
ПК-2 Способность формулировать новые конкурентные идеи в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	Уметь: У1(ПК-2) реализовывать предложенную идею при решении исследовательских и практических задач дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления Знать: З1(ПК-2) основные идеи и методы современных исследований в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления Владеть: В1(ПК-2) навыками генерирования идей в разделах дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления
ПК-3 Способность самостоятельно разрабатывать курсы по выбору для студентов вузов по профилю научной направленности	Уметь: У1(ПК-3) организовывать учебный процесс в рамках специальных курсов в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления Знать: З1(ПК-3) современные подходы в организации учебно-воспитательного процесса применительно к математике и информатике Владеть В1(ПК-3) навыками педагогического мастерства в области математики, и информатики

3. Структура и содержание дисциплины

“Приближенные методы решения дифференциальных уравнений”

Объем дисциплины составляет 4 зачетных единицы, всего 144 часа, из которых 84 часа составляет контактная работа обучающегося с преподавателем 12 часов занятия лекционного типа, 72 часа занятия семинарского типа), 58 часов составляет самостоятельная работа обучающегося, 2 часа КСР

Структура дисциплины

Таблица 2

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе	
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них	Самостоятельная работа студента часы

		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные	Консультации индивидуальные	Всего Контак- тных часов	СРС
4 семестр							
Тема 1	14	1	7			8	6
Тема 2	14	1	7			8	6
Тема 3	14	1	7			8	6
Тема 4	14	1	7			8	6
Тема 5	15	2	8			10	5
В т.ч. текущий контроль	1					1	
Промежуточная аттестация – зачет							
Итого	72	6	36			43	29
5 семестр							
Тема 6	18	2	9			11	7
Тема 7	18	2	9			11	7
Тема 8	17	1	9			10	7
Тема 9	18	1	9			10	8
В т.ч. текущий контроль	1					1	
Промежуточная аттестация – зачет							
Итого	72	6	36			43	29
	144	12	72			86	58

Содержание дисциплины

Таблица 3

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела	Форма проведения занятия	Форма текущего контроля*
4 семестр				
1	Тема 1	Методы численного дифференцирования	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола
2	Тема 2	Методы численного интегрирования	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате

				семинара или круглого стола
3	Тема 3	Численные алгоритмы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола
4	Тема 4	Методы взвешенных невязок. Понятие о вариационных методах	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола
5	Тема 5	Основы метода конечных элементов для решения краевых задач, связанных с ОДУ 2-го порядка	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола
5 семестр				
	Тема 6	Метод конечных элементов для решения краевых задач, связанных со стационарными ДУ в ЧП на примере уравнения Пуассона	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола
	Тема 7	Метод конечных элементов для решения начально-краевых задач, связанных с нестационарными ДУ в ЧП на примере уравнения теплопроводности	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола

	Тема 8	Методы визуализации численного решения ДУ в ЧП	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола
	Тема 9	Метод конечных разностей на примере НКЗ для нестационарных ДУ в ЧП 2-го порядка	Семинары, групповые и индивидуальные консультации	Обсуждение с обучающимися основных положений разделов практических занятий в формате семинара или круглого стола

4. Образовательные технологии

Форма занятий: лекции, практические занятия. При самостоятельной работе и при подготовке к зачету студенты могут воспользоваться рекомендованной литературой. Изучение данной дисциплины сопровождается выполнением самостоятельных проектных работ в среде MATLAB.

5. Формы организации и контроля самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа заключается в ознакомлении с теоретическим материалом по учебникам, монографиям и учебным пособиям, указанным в списке литературы, решении задач (практических заданий), самостоятельном выполнении при контроле со стороны преподавателя заданий по проектным работам, подготовке к семинарам, ответах на вопросы самоконтроля.

Контроль самостоятельной работы – написание и защита письменных отчетов по проектным работам, домашние задания.

В частности, важной составляющей изучения дисциплины является самостоятельная работа обучающихся при подготовке к проектным работам по дисциплине с целью их наиболее эффективного проведения. При этой подготовке обучающиеся дополнительно самостоятельно изучают те разделы теоретического материала, которые являются базовыми при проведении очередной проектной работы. Это дополнительное самостоятельное изучение, прежде всего, основано на углубленном самостоятельном изучении соответствующих разделов книг, учебно-методических пособий приведенных в списках основной и дополнительной литературы. Кроме того, при указанном дополнительном самостоятельном изучении можно использовать и доступные ресурсы сети Интернет, так как они являются одним из альтернативных источников быстрого поиска требуемой информации. Их использование возможно для получения основных и дополнительных сведений по изучаемым материалам. Одними из возможных ресурсов для этой цели являются те, которые указаны в списке программного обеспечения и Интернет-ресурсов ниже в разделе

Темы проектных работ:

4 семестр

1. Численное дифференцирование и интегрирование средствами системы MATLAB.
2. Метод Эйлера.
3. Метод Рунге-Кутты.
4. Конечно-элементный вариант метода Галеркина.
5. Разработка программы дисциплины «Численные методы решения дифференциальных уравнений» для студентов бакалавриата
6. Разработка фонда оценочных средств по дисциплине «Численные методы решения дифференциальных уравнений» для студентов бакалавриата
7. Подготовка лабораторной работы по дисциплине «Численные методы решения дифференциальных уравнений» для студентов бакалавриата
8. Подготовка методического пособия по дисциплине «Численные методы решения дифференциальных уравнений» для студентов бакалавриата

5 семестр

1. Решение краевых задач Дирихле, Неймана и смешанной задачи для уравнения Пуассона методом конечных элементов.
2. Решение начально-краевых задач для уравнения теплопроводности методом конечных элементов в сочетании с методом Кранка-Николсон.
3. Решение начально-краевых задач для системы уравнений теплопроводности методом конечных элементов в сочетании с методом Кранка-Николсон.
4. Решение начально-краевых задач для ДУ с ЧП 2-го порядка (Гурса-Дарбу, Коши-Дарбу, волнового, теплопроводности) методом конечных разностей.
5. Разработка программы дисциплины «Алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений» для студентов магистратуры
6. Разработка фонда оценочных средств по дисциплине «Алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений» для студентов магистратуры
7. Подготовка лабораторной работы по дисциплине «Алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений» для студентов магистратуры
8. Подготовка методического пособия по дисциплине «Алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений» для студентов магистратуры

Задачи (практические задания) для самостоятельной работы

4 семестр

Задача 1. Доказать линейную независимость функций $\varphi_1(t) = t(1-t)$, $\varphi_2(t) = t^2(1-t)$.

Задача 2. Используя возможность символьного интегрирования в системе MATLAB, вычислите интеграл

$$\int_0^1 \varphi_1(t)(-2+t-t^2)dt.$$

Задача 3. Вычислите тот же интеграл с помощью собственной программы, реализующей метод трапеций.

Задача 4. Используя 2 базисных функции, решить методом Галеркина следующую задачу

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + x = t, & t \in (0;1), \\ x(0) = 0, & x(1) = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Написать программу для решения методом конечных элементов следующей задачи.

$$\begin{cases} t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt} + 2 = 0, & t \in (1;4), \\ x(1) = 1, & x(4) = 0. \end{cases}$$

Найдите точное решение этой же задачи аналитически и оцените погрешность численного решения.

Задача 6. Решите систему линейных алгебраических уравнений, используя возможности системы MATLAB:

$$\begin{cases} -\frac{3}{10}a_1 - \frac{3}{20}a_2 = \frac{1}{20}, \\ -\frac{3}{20}a_1 - \frac{13}{105}a_2 = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

Задача 7. Пусть вершины плоского треугольника заданы своими координатами,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \text{ Докажите, что } |\Delta| \text{ равен удвоенной площади этого треугольника.}$$

5 семестр

Задача 1. Найти условия принадлежности данной точки данному треугольнику.

Задача 2. Какой порядок погрешности имеет формула $u_{n\pm 1}'' \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$, где h – постоянный шаг одномерной сетки?

$$\text{Задача 3. Пусть } \Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$H_i = \frac{1}{\Delta} (1, x, y) \Phi(:, i). \text{ Докажите, что } H_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Задача 4. Пусть $\Phi = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$,

$H_i = \frac{1}{\Delta}(1, x, y)\Phi(:, i)$. Докажите, что $\sum_{i=1}^3 H_i(x, y) = 1$. Как называются указанные функции при использовании треугольных конечных элементов?

Задача 5. Пусть Ω – треугольник с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Вычислите интеграл $\int_{\Omega} H_1(x, y) dx dy$.

Задача 6. Пусть Ω – треугольник с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Вычислите интеграл $\int_{\Omega} H_2(x, y) dx dy$.

Задача 7. Пусть Ω – треугольник с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Вычислите интеграл $\int_{\Omega} H_3(x, y) dx dy$.

Задача 8. Пусть Ω – треугольник с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, $g(x, y)$ – линейная функция. Вычислите интеграл $\int_{\Omega} H_1(x, y) g(x, y) dx dy$.

Задача 9. Пусть Ω – треугольник с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, $g(x, y)$ – линейная функция. Вычислите интеграл $\int_{\Omega} H_2(x, y) g(x, y) dx dy$.

Задача 10. Пусть Ω – треугольник с вершинами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, $g(x, y)$ – линейная функция. Вычислите интеграл $\int_{\Omega} H_3(x, y) g(x, y) dx dy$.

Задача 11. Пусть $z = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$, Ω – область, ограниченная эллипсом

$z(x, y) = 0$. Вычислите производную данной функции по единичному вектору внешней нормали к границе области Ω .

Задача 12. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 3$, $g = 3 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{4x}{a^2} - \frac{4y}{b^2}$,

$\vec{f} = \left(\frac{x^3}{a^2}, \frac{y^3}{b^2}\right)^T$. Убедитесь, что функция $z = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$ является решением

уравнения

$$- \operatorname{div}(A \nabla z + z a) + b \cdot \nabla z + c z = g - \operatorname{div} \vec{f}.$$

Запишите корректное краевое условие Неймана для данного уравнения, рассматриваемого в области Ω , ограниченной эллипсом $z(x, y) = 0$.

6. **Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине**, включающий:

6.1. Перечень проверяемых компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы формирования компетенций

Описание показателей и критериев оценивания компетенций приведено в Приложении 1.

6.2. Описание шкал оценивания

Итоговый контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде зачетов в 4 и 5 семестрах, на которых определяется:

- уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
- уровень понимания студентами изученного материала
- способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Зачёт предполагает выполнение студентом отчётной работы и ответ на теоретические вопросы.

Зачет в 4 семестре

Оценка	Уровень подготовки
Зачтено	В целом хорошая подготовка с заметными ошибками или недочетами. Студент дает полный ответ на все теоретические вопросы. Студент полностью выполнил практическое задание. Минимально допустимый уровень сформированности всех проверяемых компетенций – «Ниже среднего»
Не зачтено	Подготовка недостаточная и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы, как на теоретические вопросы билета, так и на наводящие и дополнительные вопросы преподавателя. Практическое задание выполнено не в полном объёме. Хотя бы по одной из проверяемых компетенций продемонстрирован уровень сформированности «Низкий» или «Нулевой»

Зачет в 5 семестре

Оценка	Уровень подготовки
Зачтено	В целом хорошая подготовка с заметными ошибками или недочетами. Студент дает полный ответ на все теоретические вопросы. Студент полностью выполнил практическое задание. Минимально допустимый уровень сформированности всех проверяемых компетенций – «Ниже среднего»
Не зачтено	Подготовка недостаточная и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы, как на теоретические вопросы билета, так и на наводящие и дополнительные вопросы преподавателя. Практическое задание выполнено не в полном объёме. Хотя бы по одной из проверяемых компетенций продемонстрирован уровень сформированности «Низкий» или «Нулевой»

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине , характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- индивидуальное собеседование,
- письменные ответы на вопросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания.
- задания проектных работ.

6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

Список контрольных вопросов для проведения тестирования, промежуточной аттестации и зачета (принимаются неформализованные ответы, правильность которых оценивается преподавателем).

4 семестр

1. Основные методы численного дифференцирования
2. Основные методы численного интегрирования
3. Численное дифференцирование и интегрирование в системе MATLAB
4. Решение задачи Коши для системы ОДУ методом Эйлера
5. Решение задачи Коши для системы ОДУ методом Рунге-Кутты
6. Понятие о методах взвешенных невязок: метод коллокаций.
7. Понятие о методах взвешенных невязок: метод наименьших квадратов.
8. Понятие о методах взвешенных невязок: метод Галеркина.
9. Слабая формулировка понятия решения дифференциального уравнения.
10. Использование кусочно линейных базисных функций в слабом варианте метода Галеркина.
11. Переформулировка слабого метода Галеркина в терминах конечных элементов.
12. Понятие о вариационных методах. Метод Рэлея-Ритца.
13. Основные этапы МКЭ.
14. Структура программы, реализующей МКЭ.
15. Описание входных данных для программы, реализующей МКЭ.
16. Локальные матрицы и векторы нагрузки в МКЭ и их сборка в глобальную матрицу и глобальный вектор.
17. Применение ограничений в МКЭ.

5 семестр

1. Краевые задачи для двумерного уравнения Пуассона. Постановки задач и переход к слабой формулировке.
2. Треугольный конечный элемент.
3. Программирование МКЭ для решения задачи Дирихле.
4. Программирование МКЭ для смешанной задачи Дирихле-Неймана.
5. Особенности программирования МКЭ для эллиптического уравнения в дивергентной форме.
6. Краевые задачи для уравнения теплопроводности. Постановки задач и переход к слабой формулировке.
7. Методы правой и левой разностной производной.
8. Метод Кранка-Николсон.

9. Программирование МКЭ и метода Кранка-Николсон.
10. Особенности программирования системы уравнений теплопроводности.
11. Понятие о триангуляции Делоне. Построение триангуляции в системе MATLAB.
12. Построение линий уровня функции, заданной на триангуляции.
13. Построение градиентного поля направлений на триангуляции.
14. Решение задачи Гурса-Дарбу методом конечных разностей.
15. Решение задачи Коши-Дарбу методом конечных разностей.
16. Решение смешанной задачи для волнового уравнения методом конечных разностей.
17. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом конечных разностей.

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. №55-ОД,

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977 (6 экз.), 1983 (4 экз.), 1989 (2 экз.).
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000 (1 экз.), 2001 (1 экз.), 2002 (1 экз.), 2003 (49 экз.), 2004 (20 экз.), 2007 (5 экз.), 2008 (2 экз.).

б) дополнительная литература:

1. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001 (11 экз.).
2. Формалев В. Ф. , Ревизников Д. Л. Численные методы: учеб. пособие для студентов техн. ун-тов. М.: Физматлит, 2006 (10 экз.).

в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре математической физики и оптимального управления для выдачи студентам

1. Чернов А.В. Численная реализация метода конечных элементов в системе MATLAB. Н.Новгород: ННГУ, 2016 (42 экз.).
2. Чернов А.В. Численное решение распределенных задач оптимизации методом параметризации управления. Н.Новгород: ННГУ, 2014 (70 экз.).
3. Чернов А.В. Применение системы MatLab к решению простейшей задачи вариационного исчисления: описание лабораторной работы. Н.Н.: ННГУ, 2007 (85 экз.).

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

<http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

MATLAB

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- помещения для проведения занятий: лекционного типа, семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для хранения и

профилактического обслуживания оборудования и помещения для самостоятельной работы обучающихся, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ;

- Учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде, в электронных библиотеках и на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики.
- материально-техническое обеспечение, необходимое для реализации дисциплины, включая лабораторное оборудование
- лицензионное программное обеспечение (*не менее 2 - Windows, Microsoft Office*);
- ». Компьютерный класс, оснащенный персональными компьютерами с установленной на них системой MATLAB
- обучающиеся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечиваются электронными и (или) печатными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций ОПОП ВО по направлению (профилю) **01.06.01 Математика и механика**.

Автор _____ А.В. Чернов

Рецензент _____

Директор Института аспирантуры _____ Б.И.Бедный

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 02.06.2021 года, протокол № 8.

Оценивание уровня сформированности компетенции **УК-1**

Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания (дескрипторы)				
	Не зачтено		Зачтено		
	1 «плохо»	2 «неудовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
<p>Знать:</p> <p>З1(УК-1) методы критического анализа и оценки современных научных достижений, а также методы генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях</p>	Отсутствует знание теоретического материала. Невозможно оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок в знании положений специализированных разделов дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
<p>Уметь:</p> <p>У1(УК-1) анализировать альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов. У2(УК-1): при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся операционализации, исходя из наличных ресурсов и ограничений</p>	Отсутствует умение решать стандартные задачи	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с негрубыми ошибками	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с незначительными погрешностями	Умение решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления без ошибок и погрешностей

Владеть: В1(УК-1): навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях. В2(УК-1): навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях
---	---	--	---	--	--

Оценивание уровня сформированности компетенции УК-5

Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)	Критерии оценивания (дескрипторы)				
	Не зачтено		Зачтено		
	1 «плохо»	2 «неудовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Знать: З1(УК-5): содержание процесса целеполагания профессионального и личностного развития, его особенности и способы реализации при решении профессиональных задач, исходя из этапов карьерного роста и требований рынка труда	Отсутствие знаний теоретического материала . Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки в знании положений специализированных разделов дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки , без ошибок.

<p>Уметь:</p> <p>У1(УК-5) формулировать цели личного и профессионального развития и условия их достижения, исходя из тенденций развития области профессиональной деятельности, этапов профессионального роста, индивидуально-личностных особенностей</p>	Отсутствует умение решать стандартные задачи	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с негрубыми ошибками	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с незначительными погрешностями	Умение решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления без ошибок и погрешностей
<p>У2(УК-5): осуществлять личный выбор в различных профессиональных и морально-ценностных ситуациях, оценивать последствия принятого решения и нести за него ответственность перед собой и обществом</p>	Отсутствует умение решать стандартные задачи	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с негрубыми ошибками	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с незначительными погрешностями	Умение решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления без ошибок и погрешностей

Владеть: В1(УК-5) приемами и технологиями целеполагания, целереализации и оценки результатов деятельности по решению профессиональных задач. В2(УК-5): способами выявления и оценки индивидуально-личностных, профессионально-значимых качеств и путями достижения более высокого уровня их развития	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях
---	---	--	---	--	--

Оценивание уровня сформированности компетенции **ОПК-1**

Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в области математики с использованием современных методов

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)				
	Не зачтено		Зачтено		
	1 «плохо»	2 «неудовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Знать: З1(ОПК-1): основные идеи, методы, результаты и актуальные проблемы исследуемой области математики	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки в знании положений специализированных разделов дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
Уметь: У1(ОПК-1) анализировать примеры, формулировать гипотезы, доказывать утверждения, оформлять полученные результаты	Отсутствует умение решать стандартные задачи	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с негрубыми ошибками	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с незначительными погрешностями	Умение решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамически систем и оптимального управления без ошибок и погрешностей

Владеть В1(ОПК-1) навыками планирования исследований, поиска и анализа научной информации	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях
--	---	--	---	--	--

Оценивание уровня сформированности компетенции **ОПК-2**

Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)				
	Не зачтено		Зачтено		
	1 «плохо»	2 «неудовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Знать: З1(ОПК-2) материал математических дисциплин, входящих в основные образовательные программы высшего образования, и современные методики преподавания	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок в знании положений специализированных разделов дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
Уметь: У1(ОПК-2) планировать и организовывать учебный процесс, разрабатывать программы математических дисциплин (модулей)	Отсутствует умение решать стандартные задачи	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с негрубыми ошибками	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с незначительными погрешностями	Умение решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления без ошибок и погрешностей

Владеть: навыками преподавания математических дисциплин	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях
---	---	--	---	--	--

*Оценивание уровня сформированности компетенции **ПК-1***

Способность получать новые научные и прикладные результаты в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)				
	Не зачтено		Зачтено		
	1 «плохо»	2 «неудовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Знать: З1(ПК-1) специализированные разделы дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления, необходимые при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок в знании положений специализированных разделов дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
Уметь: У1(ПК-1) анализировать известные результаты по теме исследования, формулировать гипотезы, доказывать утверждения, оформлять полученные результаты	Отсутствует умение решать стандартные задачи	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с негрубыми ошибками	Наличие умений решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с незначительными и погрешностями	Умение решать исследовательские задачи дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления без ошибок и погрешностей

Владеть: В1(ПК1) специализированными методами и результатами, профессиональными пакетами программ, применяемыми при исследовании в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях
---	---	--	---	--	--

Оценивание уровня сформированности компетенции **ПК-2**

Способность формулировать новые конкурентные идеи в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)				
	Не зачтено		Зачтено		
	1 «плохо»	2 «неудовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	5 «отлично»
Знать: З1(ПК-2) основные идеи и методы современных исследований в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок в знании методов исследования дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок в знании методов исследования.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
Уметь: У1(ПК-2) реализовывать предложенную идею при решении исследовательских и практических задач дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	Отсутствует умение реализовывать предложенную идею	наличие грубых ошибок при реализации предложенной идеи	Наличие умений реализации предложенной идеи с негрубыми ошибками	Наличие умений реализации предложенной идеи с незначительными погрешностями	Наличие умений реализовывать идею в стандартных ситуациях

Владеть: В1(ПК-2): навыками генерирования идей в разделах дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях
---	---	--	---	--	--

Оценивание уровня сформированности компетенции **ПК-3**

Способность самостоятельно разрабатывать курсы по выбору для студентов вузов по профилю научной направленности

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)				
	Не зачтено		Зачтено		5 «отлично»
	1 «плохо»	2 «неудовлетворительно»	3 «удовлетворительно»	4 «хорошо»	
Знать: З1(ПК-3) современные подходы в организации учебно-воспитательного процесса применительно к математике и информатике	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки в знании современных подходов в организации учебно-воспитательного процесса применительно математике и информатике	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок в знании современных подходов	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.
Уметь: У1(ПК-3) организовывать учебный процесс в рамках специальных курсов в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	Отсутствует умение организовать учебный процесс в рамках специальных курсов в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	наличие грубых ошибок при организации учебного процесса в рамках специальных курсов в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления	Наличие умений организации учебного процесса в рамках специальных курсов с негрубыми ошибками	Наличие умений организации учебного процесса в рамках специальных курсов в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления с незначительными погрешностями	Наличие умений организации учебного процесса в рамках специальных курсов в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления в стандартных ситуациях

<i>Владеть</i> <i>В1 (ПК-3):</i> навыками педагогического мастерства в области математики, и информатики	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях
---	---	--	---	--	--