

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Высшая школа общей и прикладной физики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением ученого совета ННГУ

протокол от  
«        »        20\_\_ г.

**Рабочая программа дисциплины**  
Теория функций комплексного переменного

---

Уровень высшего образования  
Бакалавриат

---

Направление подготовки / специальность  
03.03.02 - Физика

---

Направленность образовательной программы  
Фундаментальная физика

---

Форма обучения  
очная

---

Нижний Новгород

2021 год

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина Б1.О.06.05, Теория функций комплексного переменного относится к обязательной части ОПОП направления подготовки 03.03.02 Физика.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине	
ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности;	ОПК-1.1: Знания: ОПК-1.2: Умения: ОПК-1.3: Навыки:	ОПК-1.1: Знать комплексные числа и операции с ними; свойства дифференцируемых и аналитических функций комплексного переменного; криволинейные интегралы функций комплексного переменного; ряды Тейлора и Лорана функций комплексного переменного; особые точки функций комплексного переменного; теорию вычетов и ее применение в вычислении некоторых типов интегралов функций действительного переменного; основы теории конформных отображений и их применение к решению уравнений в частных производных; основы операционного исчисления; основы асимптотической оценки интегралов ОПК-1.2: Уметь применять методы теории функций комплексного переменного для вычисления интегралов, решения уравнений в частных производных, решения дифференциальных уравнений методами операционного исчисления, применять метод перевала для	Собеседование и задачи (практические задания)

		асимптотической оценки интегралов. ОПК-1.3: Владеть навыками работы с комплексными числами, аппаратом конформных отображений, аппаратом операционного исчисления для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, методами нахождения интегралов с использованием теории вычетов.	
--	--	--	--

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>очная</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>5</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>180</b>
в том числе	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа (практические занятия / лабораторные работы)	<b>48</b>
- КСР	<b>2</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>62</b>
<b>Промежуточная аттестация</b>	<b>36</b>
	<b>экзамен</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	

	очная	очная	очная	очная	очная	очная
Понятие комплексных чисел и стереографическая проекция	10	2	4		6	4
Последовательности и ряды комплексных чисел, множества и кривые на комплексной плоскости	10	2	4		6	4
Функции комплексного переменного, дифференцируемость, геометрический смысл производной	10	2	4		6	4
Интегрирование функций комплексного переменного	10	2	4		6	4
Функциональные ряды, степенные ряды, ряд Тейлора, теорема единственности	10	2	4		6	4
Аналитическое продолжение	12	2	4		6	6
Ряд Лорана для функций комплексного переменного	12	2	4		6	6
Особые точки аналитических функций	12	2	4		6	6
Теория вычетов	14	4	4		8	6
Конформные отображения	14	4	4		8	6
Основы операционного исчисления	14	4	4		8	6
Основы асимптотических оценок интегралов на примере метода перевала	14	4	4		8	6
Аттестация	36					
КСР	2				2	
Итого	180	32	48	0	82	62

Практические занятия (семинарские занятия /лабораторные работы) организуются, в том числе в форме практической подготовки, которая предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Практическая подготовка предусматривает:

Разбор решения задач различной степени сложности, проведение обсуждения рассматриваемых проблем в свете последних научных достижений в соответствующей области знаний. Студенты работают как индивидуально, так и коллективно.

На проведение практических занятий (семинарских занятий /лабораторных работ) в форме практической подготовки отводится 12 ч.

Практическая подготовка направлена на формирование и развитие:

- практических навыков в соответствии с профилем ОП:

Применение знаний и умений при решении научно-исследовательских задач профессиональной деятельности

- компетенций:

ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности;

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках: занятий семинарского типа, групповых консультаций, индивидуальных консультаций.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающег	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.

	ося от ответа						
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом . Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно», продемонстрированы знания, умения, владения по соответствующим компетенциям на уровне, выше предусмотренного программой
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы

		одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

(согласно оценочным средствам табл.2)

### Теоретические вопросы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины:

1. Комплексные числа. Действительная и мнимая части комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Арифметические действия с комплексными числами и их геометрический смысл.
2. Корни из комплексных чисел. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Возведение в комплексную степень.
3. Последовательности комплексных чисел. Предел. Ограниченность. Покоординатная сходимость. Свойства модулей и аргументов сходящихся последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Критерий Коши.
4. Ряды комплексных чисел. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости. Сходимость абсолютно сходящегося ряда.
5. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Образы прямых и окружностей при стереографической проекции.
6. Кривые на комплексной плоскости. Простая кривая. Замкнутая кривая. Неограниченная кривая. Спрямолинейная и кусочно-гладкая кривые.
7. Множества на комплексной плоскости. Открытые, замкнутые, ограниченные и неограниченные множества. Граница множества. Предельные точки множества. Связное множество. Область. Односвязная и  $n$ -связная область. Компактное множество на комплексной плоскости.
8. Функции комплексной переменной. Предел. Непрерывность и равномерная непрерывность. Непрерывность действительной и мнимой части, модуля и аргумента непрерывной функции комплексного переменного. Теорема Кантора.
9. Дифференцируемость функций комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Примеры. Гармонические и сопряженные функции.
10. Дифференцируемость основных функций ( $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ), рациональных и других элементарных функций. Теорема о существовании дифференцируемой функции комплексного переменного по заданной действительной (мнимой) части.
11. Геометрический смысл производной. Теорема об обратной функции.
12. Интегрирование функций комплексного переменного. Формула для вычисления интеграла с помощью параметризации. Неравенства. Определение несобственного интеграла.
13. Теорема о возможности аппроксимировать интеграл по кривой интегралом по ломаной. Теорема об аппроксимации интеграла по границе области.

14. Интегральная теорема Коши. Следствия.
15. Интеграл и первообразная. Теорема о первообразной.
16. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем для функции комплексного переменного и гармонической функции.
17. Принцип максимума гармонической функции и принцип максимума модуля дифференцируемой функции.
18. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.
19. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.
20. Почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда.
21. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
22. Регулярные функции. Основной критерий регулярности. Оценка радиуса сходимости степенного ряда регулярной функции.
23. Почленное дифференцирование степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
24. Формулы для коэффициентов ряда Тейлора. Основные разложения  $(\sin z, \cos z, e^z, (1+z)^k, k \in \mathbb{Z})$ .
25. Интегральное представление производных регулярной функции.
26. Неравенство Коши. Бесконечная дифференцируемость дифференцируемой и гармонической функций.
27. Целые функции. Теорема Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры (про один корень). Теорема Морера.
28. Теорема Вейерштрасса о почленном дифференцировании функционального ряда.
29. Теорема единственности. Понятие аналитического продолжения.
30. Принцип аналитического продолжения. Аналитические продолжения элементарных функций и соотношений.
31. Правильные и особые точки. Теорема о том, что на границе сходимости степенного ряда лежит особая точка функции.
32. Аналитическое продолжение вдоль кривой. Функции, аналитические на кривой и в области. Аналитические функции  $\ln z$  и  $z^\alpha$ . Точки ветвления.
33. Ряд Лорана. Регулярность суммы ряда Лорана. Теорема Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.
34. Изолированные особые точки однозначного характера. Теорема о главной части ряда Лорана в окрестности устранимой точки. Следствие. Классификация особых точек.
35. Нули регулярных функций. Вид регулярной функции в окрестности нуля. Полюса. Порядок полюса. Вид ряда Лорана в окрестности полюса.
36. Существенно особые точки. Вид ряда Лорана в окрестности существенно особой точки. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Теорема Пикара.
37. Мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфной функции.
38. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Следствие. Теорема о вычетах для области, содержащей бесконечность.
39. Лемма Жордана.
40. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры (для нескольких корней).
41. Определение конформного отображения.
42. Свойства конформных отображений. Принцип сохранения области.
43. Однолиственность функции в точке. Локальный критерий однолиственности. Необходимые и достаточные условия однолиственности функции в полюсе и в бесконечности.
44. Принцип соответствия границ. Критерий однолиственности функции в области. Теорема Римана.
45. Линейная функция. Дробно-линейная функция.
46. Круговое свойство дробно-линейных отображений. Единственность



дробно-линейного отображения, переводящего три заданные точки в три заданные точки.

47. Симметричные точки. Сохранение симметрии при дробно-линейных отображениях.
48. Основные свойства степенной функции и функции Жуковского.
49. Круговые луночки. Показательная функция.
50. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Существование и единственность решения.
51. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для круга и полуплоскости.
52. Интегралы, зависящие от параметра. Теоремы о непрерывности, регулярности функции, заданной интегралом, зависящим от параметра.
53. Интегрирование под знаком интеграла.
54. Преобразование Лапласа. Свойства изображений.
55. Свойства преобразования Лапласа (линейность, теорема подобия, изображение производной, интегрирование оригинала, интегрирование и дифференцирование изображения, теорема запаздывания, теорема смещения, теорема свертки).
56. Формула Меллина.
57. Достаточные условия существования оригинала. Нахождение оригинала с помощью вычетов.
58. Метод Лапласа асимптотической оценки интегралов. Формула Стирлинга. Метод перевала. Поведение гармонической функции в окрестности седловой точки. Пример применения метода перевала.

**Типовые задачи для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины:**

Задача 1 Представить в алгебраической форме  $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$ .

Задача 2 Конформно отобразить область  $\{ |z| > 1, |z+1| < 1, \operatorname{Im} z < 0 \}$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

Задача 3 Найти интеграл  $\int_C |z| \bar{z} dz$ , где  $C$  - проходимая против часовой стрелки дуга окружности  $\{ |z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0 \}$ .

Задача 4 Найти интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^4 + 16} dx$

Задача 5 Операционным методом найти решение дифференциального уравнения  $x'' + x' = 4 \sin^2 t$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = 0, x'(0) = -1$ .

Задача 6 Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для круга и полуплоскости.

Задача 7 Примеры применения теории вычетов к вычислению интегралов функций действительного переменного типа  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} R(x) dx$ , где  $R(x)$  – рациональная функция.

Задача 8 Примеры применения теории вычетов к вычислению интегралов функций действительного переменного, сводящиеся к вычислению интегралов от многозначных функций.

Задача 8 Примеры применения теоремы Руше и принципа аргумента для локализации корней полинома.

Задача 9 Примеры применения операционного исчисления при решении дифференциальных уравнений.

Задача 10 Пример применения метода перевала для асимптотической оценки цилиндрических функций первого рода.

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **а) основная литература:**

1. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 312 с. – 37 экз.
2. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1989. - 477 с. – 35 экз.
3. А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М.: Физматлит, 2010. - 336 с. — Режим доступа: ЭБС «Консультант студента»  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922101332.html>

### **б) дополнительная литература:**

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973 -736 с. -30 экз.
2. Теория функций комплексного переменного. Карасёв И. П. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. -216 с. - Режим доступа: ЭБС «Консультант студента»  
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922109604.html>

### **в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)**

1. Учебно-образовательная физико-математическая библиотека EqWorld  
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/complex.htm>
2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"  
[http://window.edu.ru/catalog/resources?p\\_rubr=2.2.74.12.55](http://window.edu.ru/catalog/resources?p_rubr=2.2.74.12.55)

## **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: Для проведения лекций и практических занятий требуется типовое оборудование лекционной аудитории.

Для подготовки самостоятельных контрольных работ и для их графического представления (если это необходимо), а также для расширения коммуникационных возможностей студенты имеют возможность работать в компьютерных классах с соответствующим лицензионным программным обеспечением и выходом в Интернет.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 03.03.02 - Физика.

Автор(ы): Т.В. Медведев

Заведующий кафедрой:

Программа одобрена на заседании методической комиссии  
ВШОПФ от 30.06.2021, протокол № 3.