**Приложение 2**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет**

**им. Н.И. Лобачевского**

|  |
| --- |
| Институт информационных технологий, математики и механики |

УТВЕРЖДЕНО

решением президиума Ученого совет ННГУ

протокол от

«11» мая 2021 г. № 2

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

|  |
| --- |
| **АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ** |

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

|  |
| --- |
| **бакалавриат** |

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

|  |
| --- |
| **01.03.02 Прикладная математика и информатика** |

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

|  |
| --- |
| **Системный анализ, исследование операций и управление** |

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

|  |
| --- |
| **очно-заочная** |

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2021

**1. Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ОПОП**

Дисциплина Б1.О.03, Алгебра и геометрия относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

**2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Формируемые компетенции** (код, содержание компетенции) | **Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции** | | **Наименование оценочного средства** |
| **Индикатор достижения компетенции**\*  (код, содержание индикатора) | **Результаты обучения**  **по дисциплине\*\*** |
| *УК-1*  Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | *УК-1.1.*  Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации | *Знать* основные понятия теории многочленов, векторных пространств, евклидовых пространств, теории определителей, линейной алгебры, аналитической геометрии. | Собеседование |
| *УК-1.2*  Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности | *Уметь* корректно формулировать алгебраические задачи и иллюстрировать работу алгебраических алгоритмов на примерах. | Задачи |
| *УК-1.3*  Имеет практический опытработы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов. | *Владеть* опытом применения методов и принципов самостоятельной научно-исследовательской работы. | Контрольная работа |
| *ОПК-1*  Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | *ОПК-1.1.*  Знает как применять  фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук при решении практических задач | *Знать* основные методы решения задач теории векторных пространств, евклидовых пространств, линейных преобразований. | Собеседование |
| *ОПК-1.2.*  Умеет использовать фундаментальные знания в профессиональной деятельности, осуществлять выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний | *Уметь* разрабатывать модели объектов с применением методов линейной алгебры. | Задачи |

**3. Структура и содержание дисциплины**

**3.1. Трудоемкость дисциплины**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Очно-заочная форма обучения** |
| **Общая трудоемкость** | **18 ЗЕТ** |
| **Часов по учебному плану** | **648** |
| **в том числе** |  |
| **Семестр 1**  **аудиторные занятия (контактная**  **работа):**  **- занятия лекционного типа**  **- занятия семинарского типа**  **- текущий контроль (КСР)** | **51**  **32**  **16**  **3** |
| **самостоятельная работа** | **129** |
| **Промежуточная аттестация –**  **Экзамен, зачет** | **36** |
| **Семестр 2**  **аудиторные занятия (контактная**  **работа):**  **- занятия лекционного типа**  **- занятия семинарского типа**  **- текущий контроль (КСР)** | **51**  **32**  **16**  **3** |
| **самостоятельная работа** | **93** |
| **Промежуточная аттестация –**  **Экзамен, зачет** | **36** |
| **Семестр 3**  **аудиторные занятия (контактная**  **работа):**  **- занятия лекционного типа**  **- занятия семинарского типа**  **- текущий контроль (КСР)** | **51**  **32**  **16**  **3** |
| **самостоятельная работа** | **165** |
| **Промежуточная аттестация –**  **Экзамен, зачет** | **36** |

**3.2. Содержание дисциплины**

**1 семестр**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *п/п* | *Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),*  *форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)* | *Семестр* | *Часов* | | | | | |
| *Всего* | *В том числе* | | | | |
| *Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы*  *из них* | | | | *Самостоятельная работа обучающегося* |
| *Занятия лекционного типа* | *Занятия семинарского типа* | *Занятия лабораторного типа* | *Всего* |
| 1. | **Целые числа.** Делимость. НОД. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. Сравнимость целых чисел по заданному модулю. Классы вычетов (сравнений). Арифметика вычетов. | 1 | 22 | 4 | 1 |  | 5 | 17 |
| 2. | **Комплексные числа.** Тригонометрическая форма комплексного числа. Сопряженные числа. Неравенство треугольника. Формула Муавра, корни из единицы. Решение алгебраических уравнений малых степеней. Числовые кольца и поля | 1 | 24 | 4 | 2 |  | 6 | 18 |
| 3. | **Многочлены.** Делимость в кольце многочленов. НОД. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены над полем. Разложение многочлена на неприводимые множители. Производная многочлена. Основная теорема алгебры над полем комплексных чисел. Формулы Виета. Интерполяционный многочлен. Неприводимые многочлены над кольцом целых и полем рациональных чисел. Рациональные корни многочлена. Признак Эйзенштейна неприводимости. | 1 | 59 | 14 | 8 |  | 22 | 37 |
| 4. | **Матрицы и системы линейных уравнений.** Системы линейных уравнений. Метод Гаусса-Жордана их решения, его трудоемкость, оценка числа операций. Операции с матрицами (сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу, транспонирование матрицы) и их свойства. | 1 | 28 | 4 | 2 |  | 6 | 22 |
| 5. | **Линейное (векторное) пространство над полем.** Примеры: пространство геометрических векторов, пространство радиус-векторов, арифметическое пространство над полем *F*, пространство матриц над полем *F*, пространство многочленов. Простейшие следствия из аксиом. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Эквивалентные системы векторов. Теорема о замене.Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства. Координаты вектора в базисе. Изменение координат вектора при замене базиса, матрица перехода. Изоморфизм линейных пространств. | 1 | 44 | 6 | 3 |  | 9 | 35 |
|  | Текущий контроль (КСР) |  | 3 |  |  |  | 3 |  |
|  | **Промежуточная аттестация: экзамен, зачет** |  | 36 |  |  |  |  |  |
|  | **Итого** |  | 216 | 32 | 16 |  | 51 | 129 |

**2 семестр**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *п/п* | *Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),*  *форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)* | *Семестр* |  | | | | | |
| *Всего часов* | *В том числе* | | | | |
| *Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы*  *из них* | | | | *Самостоятельная работа обучающегося* |
| *Занятия лекционного типа* | *Занятия семинарского типа* | *Занятия лабораторного типа* | *Всего* |
| 1. | **Теория систем линейных уравнений.** Ранг матрицы. Теорема Кронекера–Капелли. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия. Два способа задания линейного подпространства, фундаментальная система решений системы линейных уравнений. Размерность пространства решений системы линейных однородных уравнений. | 2 | 24 | 6 | 3 |  | 9 | 15 |
| 2. | **Суммы подпространств**, базис и размерность суммы. Прямая сумма. Критерий прямой суммы. | 2 | 16 | 4 | 2 |  | 6 | 10 |
| 3 | **Векторы на плоскости и в пространстве.** **Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов.** Операции с векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная и аффинная системы координат. Выражение скалярного произведения в прямоугольной и произвольной аффинной системе координат. Векторное произведение. Его свойства, выражение через координаты. Смешанное произведение. Определители 2-го и 3-го порядка, их геометрический смысл. | 2 | 21 | 4 | 2 |  | 6 | 15 |
| 4 | **Прямые и плоскости.** Различные виды задания прямых и плоскостей, геометрический смысл коэффициентов. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Задачи на нахождение расстояний и углов между прямыми и плоскостями. | 2 | 13 | 2 | 1 |  | 3 | 10 |
| 5. | **Определитель (детерминант) матрицы и его свойства.** Теорема Лапласа. Правило Крамера. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Теорема об умножении определителей. | 2 | 27 | 8 | 4 |  | 12 | 15 |
| 6. | **Линейные преобразования** векторного пространства, действия с ними, их матрицы, изменение матрицы линейного преобразования при изменении базиса, подобие матриц. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа. Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение его коэффициентов через элементы матрицы. Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел и ее вещественный аналог.Диагонализуемые преобразования. | 2 | 40 | 8 | 4 |  | 12 | 28 |
|  | Текущий контроль (КСР) |  | 3 |  |  |  | 3 |  |
|  | **Промежуточная аттестация: зачёт, экзамен** |  | 36 |  |  |  |  |  |
|  | **Итого** |  | 180 | 32 | 16 |  | 51 | 93 |

**3 семестр**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *п/п* | *Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),*  *форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)* | *Семестр* |  | | | | | |
| *Всего часов* | *В том числе* | | | | |
| *Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы*  *из них* | | | | *Самостоятельная работа обучающегося* |
| *Занятия лекционного типа* | *Занятия семинарского типа* | *Занятия лабораторного типа* | *Всего* |
| **1.** | **Евклидово (унитарное) пространство.** Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Неравенство треугольника. Теорема Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Запись скалярного произведениия через координаты в произвольном, ортогональном и ортонормированном базисах. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Изоморфизм унитарных пространств. Нахождение псевдорешения несовместных систем линейных уравнений (метод наименьших квадратов). Геометрический смысл определителя. Неравенство Адамара. | 3 | 52 | 8 | 4 |  | 12 | 40 |
| **2.** | **Квадратичные формы** и их матрицы. Изменение матрицы квадратичной функции при изменении базиса. Теорема Лагранжа и Якоби о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции. Критерий Сильвестра положительной определенности, связь со скалярным произведением. | 3 | 52 | 8 | 4 |  | 12 | 40 |
| **3.** | **Линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств.** Связь линейных преобразований и билинейных функций в унитарном пространстве. Сопряженное преобразование, свойства операции сопряжения. Нормальное преобразование унитарного пространства, существование у него базиса из собственных векторов. Теорема о нормальном преобразовании евклидова пространства. Унитарные и ортогональные преобразования. Сопряженные и симметричные преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям. | 3 | 57 | 8 | 4 |  | 12 | 45 |
| **4.** | **Кривые и поверхности 2-го порядка.** Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядкана плоскости и в пространстве. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Центр, асимптотические направления, диаметральные плоскости. Взаимное расположение прямой и поверхности 2-го порядка. Ортогональная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка на плоскости и в пространстве. Инварианты и полуинварианты. | 3 | 52 | 8 | 4 |  | 12 | 40 |
|  | **В т.ч. текущий контроль** |  | 3 |  |  |  | 3 |  |
|  | **Промежуточная аттестация: зачёт, экзамен** |  | 36 |  |  |  |  |  |
|  | **Итого** |  | 252 | 32 | 16 |  | 51 | 165 |

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в форме зачета и экзамена.

**4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студента включает в себя подготовку к аудиторным занятиям, самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины, подготовку ко всем видам контрольных испытаний, в том числе зачету и экзамену. Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

* Чирков А.Ю., Киселева Л.Г., Веселов С.И., Золотых Н.Ю., Шевчук Е.А., Сидоров С.В. Задачи по алгебре (часть 2): Учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 80с. // Фонд образовательных электронных ресурсов. Рег. № 1085.15.06.

http://www.unn.ru/books/met\_files/Determinants.pdf

* Золотых Н.Ю., Сидоров С.В., Смирнова Т.Г., Чирков А.Ю. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВ: учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 68с. // Фонд образовательных электронных ресурсов. Рег. № 1618.17.06 <http://www.unn.ru/books/met_files/Transform.pdf>

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

1. **Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю**),

включающий:

* 1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)** | **Шкала оценивания сформированности компетенций** | | | | | | |
| **плохо** | **неудовлетворительно** | **удовлетворительно** | **хорошо** | **очень хорошо** | **отлично** | **превосходно** |
| Не зачтено | | зачтено | | | | |
| Знания | Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки. | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| Умения | Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки. | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме. | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продемонстрированы все основные умения,решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продемонстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном  объеме без недочетов |
| Навыки | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки. | Имеется минимальный  набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. | Продемонстрированы навыки  при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов. | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

**Шкала оценки при промежуточной аттестации**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Оценка** | | **Уровень подготовки** |
| зачтено | Превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
| Отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» |
| Очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» |
| Хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» |
| Удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | Неудовлетворитель-  но | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» |
| Плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

* 1. **Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения**.
     1. **Контрольные вопросы**

**Вопросы к зачету по дисциплине** *«Алгебра и геометрия»*

|  |  |
| --- | --- |
| Вопрос | Код компетенции |
| 1. Целые числа. Делимость. НОД. Алгоритм Евклида. Линейное разложение НОД. | УК-1 |
| 2. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. | УК-1 |
| 3. Сравнимость целых чисел по заданному модулю. Классы вычетов (сравнений). Арифметика вычетов. | УК-1 |
| 4. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Сопряженные числа. Неравенство треугольника. Формула Муавра, корни из единицы. Числовые кольца и поля. | УК-1 |
| 5. Многочлены над заданным числовым кольцом (полем). Делимость многочленов. НОД. Взаимно простые многочлены. | УК-1 |
| 6. Неприводимые многочлены над полем. Разложение многочлена на неприводимые. Производная многочлена. Выделение кратных множителей. | ОПК-1 |
| 7. Основная теорема алгебры над полем комплексных чисел. | ОПК-1 |
| 8. Формулы Виета. | ОПК-1 |
| 9. Интерполяционный многочлен. | ОПК-1 |
| 10. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. | ОПК-1 |
| 11. Матрицы над заданным числовым кольцом (полем) и операции с матрицами. | УК-1 |
| 12. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса их решения, его трудоемкость, оценка числа операций. Матричная интерпретация метода Гаусса. | УК-1 |
| 13. Перестановки и подстановки. | УК-1 |
| 14. Определитель (детерминант) матрицы и его свойства. | УК-1 |
| 15. Теорема Лапласа. | УК-1 |
| 16. Правило Крамера. | УК-1; ОПК-1 |
| 17. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. | УК-1; ОПК-1 |
| 18. Теорема об умножении определителей. | УК-1; ОПК-1 |

|  |  |
| --- | --- |
| Вопрос | Код компетенции |
| 1. Линейное (векторное) пространство над полем. Примеры: пространство геометрических векторов, пространство радиус-векторов, арифметическое пространство над полем F, пространство матриц над полем F, пространство многочленов. Простейшие следствия из аксиом. | УК-1 |
| 2. Подпространства. Критерий подпространства. | УК-1 |
| 3. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Эквивалентные системы векторов. Теорема о замене. | УК- |
| 4. База и ранг системы векторов. | ОПК-1 |
| 5. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства. | ОПК-1 |
| 6. Координаты вектора в базисе. Изоморфизм линейных пространств. | ОПК-1 |
| 7. Теорема Кронекера–Капелли. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия. | ОПК-1 |
| 8. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия. | ОПК-1 |
| 9. Теорема о базисном миноре. | ОПК-1 |
| 10. Столбцовый, строчечный и минорный ранги матрицы. Их равенство. | УК-1 |
| 11. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Размерность пространства решений. | УК-1 |
| 12. Два способа задания линейного подпространства и линейного многообразия в арифметическом пространстве столбцов. | УК-1 |
| 13. Суммы подпространств, базис и размерность суммы. Прямая сумма. | УК-1 |
| 14. Изменение координат вектора при замене базиса. Матрица перехода. | УК-1 |
| 15. Линейные преобразования, действия с ними, их матрицы. | ОПК-1 |
| 16. Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов. Подобные матрицы. | ОПК-1 |
| 17. Ядро и образ линейного преобразования. | ОПК-1 |
| 18. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа. | ОПК-1 |
| 19. Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение его коэффициентов через элементы матрицы. | ОПК-1 |
| 20. Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел и ее вещественный аналог. | ОПК-1 |
| 21. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа. | УК-1 |
| 22. Диагонализуемые линейные преобразования. Критерий диагонализуемости. | УК-1 |
| 23. Теорема Гамильтона-Кэли. | УК-1 |
| 24. Евклидово пространство. Следствия из аксиом. | УК-1 |
| 25. Матрица Грама. Выражение скалярного произведения векторов через координаты векторов. | УК-1 |
| 26. Ортогональные и ортонормированные системы. | УК-1 |
| 27. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. | УК-1 |
| 28. Неравенство треугольника. Теорема Пифагора. | УК-1 |
| 29. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. | УК-1 |
| 30. Запись скалярного произведения через координаты в произвольном, ортогональном и ортонормированном базисах. | УК-1 |
| 31. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. | УК-1 |
| 32. Нормальное решение системы линейных уравнений. | УК-1 |
| 33. Псевдорешения систем линейных уравнений. | УК-1 |
| 34. Метод наименьших квадратов. | ОПК-1 |
| 35. Ортогональное дополнение к множеству векторов евклидова пространства. | ОПК-1 |
| 36. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. | ОПК-1 |
| 37. Объем системы векторов. Геометрический смысл определителя. Неравенство Адамара. | ОПК-1 |
| 38 Теорема о длине перпендикуляра. | ОПК-1 |
| 39 Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. | ОПК-1 |
| 40. Теорема Лагранжа о приведении квадратичной формы к каноническому и нормальному видам | ОПК-1 |
| 41. Теорема инерции квадратичных форм. | ОПК-1 |
| 42. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм. | ОПК-1 |
| 43 Нормальные, ортогональные и симметричные преобразования. Критерий нормального преобразования. | УК-1 |
| 44. Теорема о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов у симметричной матрицы | УК-1 |
| 45. Теорема о приведении квадратичной формы к главным осям. | УК-1 |
| 46. Векторы на плоскости и в пространстве. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная и аффинная системы координат. | УК-1 |
| 47. Деление отрезка в заданном отношении.. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. | УК-1 |
| 48. Скалярное произведении, его свойства и его вид в системах координат | УК-1 |
| 49. Векторное произведение, его свойства и выражение через координаты. | УК-1 |
| 50. Смешанное произведение. Определители 2-го и 3-го порядка, их геометрический смысл. | УК-1 |
| 51. Прямая на плоскости и в пространстве. Способы ее задания. | УК-1 |
| 52. Плоскость в пространстве. Способы ее задания. Геометрический смысл коэффициентов в уравнении плоскости | ОПК-1 |
| 53. Геометрический смысл линейного неравенства. | ОПК-1 |
| 54. Взаимное расположение прямых и плоскостей и углы между ними. | ОПК-1 |
| 55. Поверхности 2-го порядка. Аффинная замена координат. Изменение уравнения квадрики при замене базиса. | ОПК-1 |
| 561. Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. | ОПК-1 |
| 57. Ортогональная замена координат (изометрия). Изменение уравнения квадрики при изометрии. | ОПК-1 |
| 58. Ортогональная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Аффинные инварианты. | ОПК-1 |
| 59. Центр квадрики. Центральные и нецентральные квадрики. | ОПК-1 |
| 60. Взаимное расположение прямой и квадрики. | ОПК-1 |

**Вопросы к экзамену по дисциплине** *«Алгебра и геометрия»*

|  |  |
| --- | --- |
| Вопрос | Код компетенции |
| 1. Целые числа. Делимость. НОД. Алгоритм Евклида. Линейное разложение НОД. | УК-1 |
| 2. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики. | УК-1 |
| 3. Сравнимость целых чисел по заданному модулю. Классы вычетов (сравнений). Арифметика вычетов. | УК-1 |
| 4. Комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Сопряженные числа. Неравенство треугольника. Формула Муавра, корни из единицы. Числовые кольца и поля. | УК-1 |
| 5. Многочлены над заданным числовым кольцом (полем). Делимость многочленов. НОД. Взаимно простые многочлены. | УК-1 |
| 6. Неприводимые многочлены над полем. Разложение многочлена на неприводимые. Производная многочлена. Выделение кратных множителей. | ОПК-1 |
| 7. Основная теорема алгебры над полем комплексных чисел. | ОПК-1 |
| 8. Формулы Виета. | ОПК-1 |
| 9. Интерполяционный многочлен. | ОПК-1 |
| 10. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. | ОПК-1 |
| 11. Матрицы над заданным числовым кольцом (полем) и операции с матрицами. | УК-1 |
| 12. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса их решения, его трудоемкость, оценка числа операций. Матричная интерпретация метода Гаусса. | УК-1 |
| 13. Перестановки и подстановки. | УК-1 |
| 14. Определитель (детерминант) матрицы и его свойства. | УК-1 |
| 15. Теорема Лапласа. | УК-1 |
| 16. Правило Крамера. | УК-1; ОПК-1 |
| 17. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. | УК-1; ОПК-1 |
| 18. Теорема об умножении определителей. | УК-1; ОПК-1 |

|  |  |
| --- | --- |
| Вопрос | Код компетенции |
| 1. Линейное (векторное) пространство над полем. Примеры: пространство геометрических векторов, пространство радиус-векторов, арифметическое пространство над полем F, пространство матриц над полем F, пространство многочленов. Простейшие следствия из аксиом. | УК-1 |
| 2. Подпространства. Критерий подпространства. | УК-1 |
| 3. Линейная оболочка. Линейная зависимость. Эквивалентные системы векторов. Теорема о замене. | УК- |
| 4. База и ранг системы векторов. | ОПК-1 |
| 5. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Размерность и базис линейного пространства. | ОПК-1 |
| 6. Координаты вектора в базисе. Изоморфизм линейных пространств. | ОПК-1 |
| 7. Теорема Кронекера–Капелли. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия. | ОПК-1 |
| 8. Множество решений системы линейных уравнений, два способа задания линейного многообразия. | ОПК-1 |
| 9. Теорема о базисном миноре. | ОПК-1 |
| 10. Столбцовый, строчечный и минорный ранги матрицы. Их равенство. | УК-1 |
| 11. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Размерность пространства решений. | УК-1 |
| 12. Два способа задания линейного подпространства и линейного многообразия в арифметическом пространстве столбцов. | УК-1 |
| 13. Суммы подпространств, базис и размерность суммы. Прямая сумма. | УК-1 |
| 14. Изменение координат вектора при замене базиса. Матрица перехода. | УК-1 |
| 15. Линейные преобразования, действия с ними, их матрицы. | ОПК-1 |
| 16. Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов. Подобные матрицы. | ОПК-1 |
| 17. Ядро и образ линейного преобразования. | ОПК-1 |
| 18. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа. | ОПК-1 |
| 19. Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение его коэффициентов через элементы матрицы. | ОПК-1 |
| 20. Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел и ее вещественный аналог. | ОПК-1 |
| 21. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа. | УК-1 |
| 22. Диагонализуемые линейные преобразования. Критерий диагонализуемости. | УК-1 |
| 23. Теорема Гамильтона-Кэли. | УК-1 |
| 24. Евклидово пространство. Следствия из аксиом. | УК-1 |
| 25. Матрица Грама. Выражение скалярного произведения векторов через координаты векторов. | УК-1 |
| 26. Ортогональные и ортонормированные системы. | УК-1 |
| 27. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. | УК-1 |
| 28. Неравенство треугольника. Теорема Пифагора. | УК-1 |
| 29. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. | УК-1 |
| 30. Запись скалярного произведения через координаты в произвольном, ортогональном и ортонормированном базисах. | УК-1 |
| 31. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. | УК-1 |
| 32. Нормальное решение системы линейных уравнений. | УК-1 |
| 33. Псевдорешения систем линейных уравнений. | УК-1 |
| 34. Метод наименьших квадратов. | ОПК-1 |
| 35. Ортогональное дополнение к множеству векторов евклидова пространства. | ОПК-1 |
| 36. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. | ОПК-1 |
| 37. Объем системы векторов. Геометрический смысл определителя. Неравенство Адамара. | ОПК-1 |
| 38 Теорема о длине перпендикуляра. | ОПК-1 |
| 39 Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. | ОПК-1 |
| 40. Теорема Лагранжа о приведении квадратичной формы к каноническому и нормальному видам | ОПК-1 |
| 41. Теорема инерции квадратичных форм. | ОПК-1 |
| 42. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм. | ОПК-1 |
| 43 Нормальные, ортогональные и симметричные преобразования. Критерий нормального преобразования. | УК-1 |
| 44. Теорема о существовании ортонормированного базиса из собственных векторов у симметричной матрицы | УК-1 |
| 45. Теорема о приведении квадратичной формы к главным осям. | УК-1 |
| 46. Векторы на плоскости и в пространстве. Базис на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная и аффинная системы координат. | УК-1 |
| 47. Деление отрезка в заданном отношении.. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. | УК-1 |
| 48. Скалярное произведении, его свойства и его вид в системах координат | УК-1 |
| 49. Векторное произведение, его свойства и выражение через координаты. | УК-1 |
| 50. Смешанное произведение. Определители 2-го и 3-го порядка, их геометрический смысл. | УК-1 |
| 51. Прямая на плоскости и в пространстве. Способы ее задания. | УК-1 |
| 52. Плоскость в пространстве. Способы ее задания. Геометрический смысл коэффициентов в уравнении плоскости | ОПК-1 |
| 53. Геометрический смысл линейного неравенства. | ОПК-1 |
| 54. Взаимное расположение прямых и плоскостей и углы между ними. | ОПК-1 |
| 55. Поверхности 2-го порядка. Аффинная замена координат. Изменение уравнения квадрики при замене базиса. | ОПК-1 |
| 561. Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. | ОПК-1 |
| 57. Ортогональная замена координат (изометрия). Изменение уравнения квадрики при изометрии. | ОПК-1 |
| 58. Ортогональная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Аффинные инварианты. | ОПК-1 |
| 59. Центр квадрики. Центральные и нецентральные квадрики. | ОПК-1 |
| 60. Взаимное расположение прямой и квадрики. | ОПК-1 |

**5.2.2 Типовые задачи для оценки сформированности компетенций УК-1**

1. Вычислить 

2. Представить в тригонометрической форме и изобразить на плоскости число 

3. Решить уравнение 

4. Решить систему уравнений в комплексных числах.

5. Вычислить 

6**.** Разложить многочлен  по степеням 

7. Найти наибольший общий делитель и коэффициенты Безу для многочленов  и 

8**.** Найти интерполяционный многочлен в форме Лагранжа по таблице интерполяции

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -1 | -1 | 1 | 11 |

9. Найти все рациональные корни многочлена  и определить их кратности.

10. Многочлен разложить на неприводимые множители над полями Q, R и C.

11. Вычислить произведение матриц 

12. Найти общее решение системы линейных уравнений 

13. Вычислить определитель 

14. Найти обратную для матрицы 

**5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1**

15. Проверить на линейную зависимость систему векторов



16. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек и , где



17. При каких значениях параметра вектор  принадлежит линейной оболочке векторов 

18. В пространстве задано линейное преобразование  Найти матрицу этого преобразования в стандартном базисе и базисе 

19. Линейное преобразование задано своей матрицей 

Найти все собственные числа. Для каждого из них указать его алгебраическую и геометрическую кратности.

Выяснить, диагонализируемо ли преобразование

а) в вещественном пространстве; б) в комплексном пространстве.

Если да, то записать матрицу перехода к базису из собственных векторов

и матрицу преобразования в этом базисе.

20. Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта, найти ортогональный базис в линейной оболочке системы векторов 

21. Найти проекцию и перпендикуляр вектора  на линейную оболочку векторов 

22. Найти псевдорешения системы 

23. Квадратичную форму  привести к каноническому виду матричным методом, методом Лагранжа выделения полных квадратов и с помощью теоремы Якоби.

24. Квадратичную форму  привести к главным осям.

25. На плоскости даны два вектора aи b длины 1 и 2 соответственно, угол между которыми равен . Найти скалярное произведение векторов a+2bи a-b.

26**.** Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую {2x–y+3z–5 = 0, x+2y–z+2 = 0} перпендикулярно к плоскости 5x–y+3z–2 =0.

27. Аффинным преобразованием привести уравнение поверхности к каноническому виду: .

28. Найти каноническую систему координат и построить кривую второго порядка 4– 12+ 9– 2+ 3– 2 = 0.

**5.2.4. Пример контрольной работы по теории комплексных чисел (оценка формирования компетенций «УК-1»)**

|  |
| --- |
| **Вариант № 1**  Вычислить  2. Представить в тригонометрической форме и изобразить на плоскости число  3. Решить уравнение  4. Решить систему уравнений в комплексных числах.  5. Вычислить |

**5.2.5.Пример контрольной работы по теории многочленов (оценка формирования компетенций «ОПК-1)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант № 1**  1**.** Разложить многочлен  по степеням  2. Найти наибольший общий делитель и коэффициенты Безу для многочленов  и  3**.** Найти интерполяционный многочлен в форме Лагранжа по таблице интерполяции   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | X | 0 | 1 | 2 | 3 | | Y | -1 | -1 | 1 | 11 |   4. Найти все рациональные корни многочлена  и определить их кратности.  5. Многочлен разложить на неприводимые множители над полями Q, R и C. |

**5.2.6. Пример контрольной работы по теории квадратичных форм (оценка формирования компетенций «ОПК-1», «ПК-2»)**

|  |
| --- |
| **Вариант № 1**  1. Квадратичную форму  привести к каноническому виду матричным методом, методом Лагранжа выделения полных квадратов и с помощью теоремы Якоби.  2. Квадратичную форму  привести к главным осям. |

**5.2.7. Пример задач, выносимых на зачет для оценки компетенции «УК-1»**

**Задача 1.** Найти НОД(134,78) и его линейное представление.

**5.2.8. Пример задач, выносимых на зачет для оценки компетенции «ОПК-1»**

**Задача 28.** Найти ортонормированный базис из собственных векторов для матрицы .

**Задача 29.** Даны четыре точки A(–3, 5, 15), B(0, 0, 7), C(2, –1, 4), D(4, –3, 0). Установить, пересекаются ли прямые AB и CD, и если пересекаются, найти точку пересечения..

**5.2.9. Пример задач, выносимых на экзамен для оценки компетенции «УК-1»**

**Задача 1.** Вычислить и изобразить на комплексной плоскости результат.

**5.2.10. Пример задач, выносимых на экзамен для оценки компетенции «ОПК-1»**

**Задача 28.** Найти ортонормированный базис из собственных векторов для матрицы .

1. **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

а) *основная литература*:

1. Курош А. Г. - Курс высшей алгебры: учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика". - СПб. [и др.]: Лань, 2003. - 432 с. [150 экз.]

2. Ильин В. А., Ким Г. Д. - Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. для вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика". - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002. - 320 с. [60 экз.]

3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

- М.: Наука, 2009. – 319 с. . [430 экз.]

б) *дополнительная литература*:

1. Проскуряков И. В. - Сборник задач по линейной алгебре: учеб. пособие для студ. физ.-мат. спец. вузов. - М.: Юнимедиастайл, Лаборатория базовых знаний, 2002. - 384 с. [150 экз.]

2. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. - Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: [учеб. пособие]. - М.: Наука, 1987. – 494 с. [104 экз.]

3. Цубербиллер О. Н. - Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - СПб. : Лань, 2003. - 336 с. [100 экз.]

в) Интернет-ресурсы

1. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ, URL:

<http://www.unn.ru/books/resources.html>..

**7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет». Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Авторы: ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики,

к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Сидоров С.В.

ст.преподаватель кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, к.ф.-м.н . \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Д.В.Грибанов

Рецензент: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой алгебры, геометрии и дискретной математики

д.ф.-м.н., профессор\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики от 02.06.2021 года, протокол № 8.