МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Физический факультет
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

и.о. декана _____ Малышев А.И.

« 30 » августа 2017 г.

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования
бакалавриат
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность
03.03.02 Физика
(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы
профиль "Теоретическая физика"
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)
бакалавр
(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения
очная
(очная / очно-заочная / заочная)

Год набора
2017
(для обучающихся какого года набора разработана Рабочая программа)

Нижний Новгород – 2017

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к базовой части Б1.Б блока Б1 «Дисциплины (модули)», является обязательной для освоения, преподается на первом году обучения, во втором семестре. Освоению дисциплины предшествует освоение дисциплины (модуля) «Аналитическая геометрия».

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра» являются:

- овладение методами построения математических моделей задач физики и математики, допускающих формулировку в рамках линейной алгебры, в том числе с учетом изучения последующих профильных дисциплин;
- освоение студентами практически важных методов матричной алгебры, решения систем линейных уравнений, исследования конечномерных линейных пространств и действующих в них линейных преобразований, а также методов теории квадратичных форм;
- выработка у студентов практических навыков стандартизации профессионально обусловленных задач различной природы с целью их решения в рамках универсальных методов линейной алгебры.

2. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины «Линейная алгебра» составляет 4 зачетных единицы, всего 144 часа, из которых 66 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (2 часа – мероприятия промежуточной аттестации; 32 часа занятия лекционного типа, 32 часа занятия семинарского типа (практические занятия), в том числе 2 часа – мероприятия текущего контроля успеваемости), 78 часов составляет самостоятельная работа обучающегося (42 часа самостоятельная работа в течение семестра, 36 часов самостоятельная работа при подготовке к промежуточной аттестации).

Содержание дисциплины «Линейная алгебра»

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) в течение семестра, часы, из них				Самостоятельная работа в течение семестра, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1. Введение. Алгебра матриц. Определители. Понятие матрицы. Основные операции над матрицами, функции от матриц. Специальные виды матриц (симметричные, эрмитовы, ортогональные) Определители, основные свойства и методы вычисления определителей. Формула полного разложения определителя и теорема Лапласа. Понятие обратной матрицы, нахождение ее элементов как решение систем уравнений. Решение матричных уравнений. Линейная независимость строк и ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.	20	6	6	–	12	8
2. Системы линейных уравнений. Определение и свойства систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера. Системы однородных линейных уравнений, свойства фундаментальной системы решений как векторного пространства. Нахождение общего решения системы неоднородных линейных уравнений.	20	6	6	–	12	8
3. Линейные пространства. Определение и свойства линейного пространства. Базис и размерность в линейных пространствах. Подпространства линейных пространств. Разложение пространства в прямую сумму подпространств. Преобразование базисов и координат векторов, матрица преобразования. Евклидовы пространства, свойства скалярного произведения, матрица	24	8	8	–	16	8

Грама. Ортонормированный базис, метод ортогонализации Грама-Шмидта. Комплексные евклидовы пространства.						
4. Линейные операторы. Определение и свойства линейного оператора. Матричное представление линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор, самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряженных операторов. Ортогональные и унитарные операторы.	22	6	6	–	12	10
5. Квадратичные формы. Определение и свойства билинейных и квадратичных форм. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы билинейной и квадратичной формы при замене базиса. Метод Лагранжа, метод ортогональных преобразований и метод Якоби для приведения квадратичной формы к диагональному виду. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.	20	6	6	–	12	8
В т.ч. текущий контроль	2	2				–
Промежуточная аттестация – **экзамен**						

3. Образовательные технологии

1) Чтение лекций;

2) сопровождение лекций написанием и выводом формул, построением графиков, изображением рисунков на доске;

3) методика «вопросы и ответы»;

4) выполнение практического задания у доски;

5) индивидуальная работа над практическим заданием;

6) работа в парах над практическим заданием;

7) работа в малых группах над практическим заданием;

8) методика «мозговой штурм».

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа обучающихся предполагает изучение конспектов лекций, выделенных разделов основной литературы, а также дополнительной литературы, выполнение практических заданий, отвечающих изучаемым разделам дисциплины, подготовку к промежуточной аттестации.

Перечень основной и дополнительной литературы для самостоятельного изучения приведен в п. 7 настоящей Рабочей программы дисциплины .

Контрольные вопросы для промежуточной аттестации, примеры практических заданий приведены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины .

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-2 способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	(ОПК-2) **Знать** границы применимости и возможности использования основных методов линейной алгебры. (ОПК-2) **Уметь** решать в рамках профессиональной деятельности задачи, требующие знания основных методов линейной алгебры. (ОПК-2) **Владеть** навыками, требующимися для решения задач линейной алгебры.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

6.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Промежуточной аттестацией для дисциплины «Линейная алгебра» является **экзамен**.

По итогам экзамена выставляется оценка по семибалльной шкале: оценки «Плохо» и «Неудовлетворительно» означают отсутствие аттестации, оценки «Удовлетворительно», «Хорошо», «Очень хорошо», «Отлично» и «Превосходно» выставляются при успешном прохождении аттестации.

6.2. Процедуры и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- индивидуальное собеседование (промежуточная аттестация).

Контрольные вопросы для индивидуального собеседования представлены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и навыков используются следующие процедуры и технологии:

- выполнение практических заданий (текущий контроль, промежуточная аттестация).

Примеры практических заданий для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации представлены в п. 6.3 настоящей Рабочей программы дисциплины.

Критериями оценивания являются полнота знаний, наличие умений и владений (навыков), перечисленных в п. 5 настоящей Рабочей программы дисциплины.

«Плохо» – обучающийся не продемонстрировал никаких знаний об основных теоретических разделах курса, не показал никаких умений и навыков выполнения практических заданий;

«Неудовлетворительно» – обучающийся не продемонстрировал представления об основных теоретических разделах курса, не показал минимально допустимый уровень умений и навыков выполнения практических заданий;

«Удовлетворительно» – обучающийся продемонстрировал изложение формулировок основных теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения практических заданий базового уровня сложности;

«Хорошо» – обучающийся продемонстрировал связное изложение основных теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения стандартных практических заданий;

«Очень хорошо» – обучающийся продемонстрировал связное изложение практически всех теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения стандартных практических заданий;

«Отлично» – обучающийся продемонстрировал связное изложение всех теоретических положений курса и успешно показал умения и навыки выполнения практических заданий повышенного уровня сложности;

«Превосходно» – обучающийся продемонстрировал уровень знаний в объеме, превышающем стандартную программу подготовки, и

продемонстрировал творческий подход к выполнению практических заданий повышенного уровня сложности.

6.3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

6.3.1. При проведении промежуточной аттестации обучающимся предлагаются следующие контрольные вопросы, охватывающие программу дисциплины «Линейная алгебра»:

1. Матрицы. Основные операции над матрицами.
2. Определители. Основные свойства. Формула полного разложения. Формулировка теоремы Лапласа.
3. Обратная матрица. Нахождение ее элементов как решение систем уравнений.
4. Линейная независимость строк и ранг матрицы.
5. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера.
6. Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
7. Общее решение системы неоднородных линейных уравнений.
8. Линейные пространства. Базис и размерность.
9. Подпространства линейных пространств.
10. Преобразование базисов и координат векторов. Матрица преобразования.
11. Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения. Матрица Грама. Ортонормированный базис. Комплексные евклидовы пространства.
12. Метод ортогонализации Грама-Шмидта.
13. Линейные операторы, свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.
14. Инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные вектора линейных операторов.
15. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный оператор.
16. Самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов. Диагональный вид самосопряженных операторов.
17. Ортогональные и унитарные операторы.
18. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Преобразование матрицы при замене базиса.
19. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду.
20. Метод ортогональных преобразований приведения квадратичной формы к диагональному виду.

21.Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

6.3.2. Примеры практических заданий для практических занятий, самостоятельной работы обучающихся, проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

1. **Введение. Алгебра матриц. Определители.**

1.1. Вычислить n-ю степень матриц:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$ 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ 3) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$ 4) $\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix}$, λ_i – числа

1.2. Матрицы $\sigma_x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\sigma_y = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}$, $\sigma_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$ называются матрицами Паули и играют большую роль в математическом аппарате квантовой механики, в частности, в описании спина электрона. Найти коммутаторы этих матриц: $[\sigma_x \sigma_y]$, $[\sigma_y \sigma_z]$, $[\sigma_z \sigma_x]$.

1.3. Вычислить определитель n-го порядка: $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \vdots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \vdots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \vdots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \vdots & 0 \end{vmatrix}$.

1.4. Показать, что определитель эрмитовой матрицы всегда является вещественным числом.

1.5. Найти матрицу X из уравнения. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

2. Системы линейных уравнений.

2.1. Найти коэффициенты квадратичного многочлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, зная, что $f(1) = -1$, $f(-1) = 9$ и $f(2) = -3$.

2.2. Найти фундаментальную систему решений и записать общее решение системы линейных однородных уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

2.3. При каком значении параметра λ система линейных уравнений

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$ является совместной?

2.4. Среди многочленов степени, не превосходящей 2, найти два линейно независимых многочлена $f_1(t)$ и $f_2(t)$ таких, что $f_1(2)= f_2(2)=3$.

3. Линейные пространства.

3.1. Для множества положительных вещественных чисел операции сложения и умножения на вещественное число определены как «$\mathbf{x}+\mathbf{y}$» $=xy$ и «$\lambda\mathbf{x}$»$=x^{\lambda}$. Является ли указанное множество с такими операциями линейным пространством? В случае положительного ответа найти его размерность и указать базис.

3.2. В пространстве R_3 даны два базиса $\{\mathbf{e}\}$ и $\{\mathbf{f}\}$ с координатами базисных векторов в стандартном базисе $\mathbf{e}_1=(1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{e}_2=(2,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{e}_3=(1,\ 1,\ 3)$ и $\mathbf{f}_1=(0,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{f}_2=(1,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{f}_3=(1,\ 0,\ 2)$.

1) Найти матрицу перехода S от базиса $\{\mathbf{e}\}$ к базису $\{\mathbf{f}\}$.

2) Найти матрицу обратного перехода.

3) Найти координаты элемента $\mathbf{e}_1$ в обоих базисах.

4) Найти координаты X^e элемента $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$, если его координаты в базисе $\{\mathbf{f}\}$ есть $X^f=(5,\ 3,\ 1)$.

3.3. Выяснить, является ли множество P векторов пространства R_n, все координаты которых равны между собой, подпространством линейного пространства, и если является, то найти его размерность.

3.4. Найти размерность суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2, являющихся линейными оболочками векторов $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$ и $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$:

$\mathbf{a}_1=(1,\ 2,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{a}_2=(1,\ 1,\ 1,\ 0)$;

$\mathbf{b}_1=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $\mathbf{b}_2=(1,\ 3,\ 0,\ 1)$.

3.5. Могут ли векторы $\mathbf{x}_1=(1,\ 1,\ 1)$, $\mathbf{x}_2=(1,\ 1,\ 0)$ и $\mathbf{x}_3=(1,\ 0,\ 0)$ образовать базис в трёхмерном пространстве? Построить с помощью данной системы векторов ортонормированный базис.

3.6. В комплексном пространстве C_n со скалярным произведением $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{k=1}^{n} x_k\bar{y}_k$ построить базис в ортогональном дополнении $M^{\perp}$ подпространства M, если компоненты векторов $\mathbf{x}\in M$ удовлетворяют уравнению $x_1+ix_2=0$ и $n=2$.

4. Линейные операторы.

4.1. Выяснить, является ли данное преобразование пространства R_n линейным: $A(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}$, $n=2$.

4.2. Записать в декартовом базисе трёхмерного пространства матрицу оператора проектирования на прямую линию, заданную уравнением $x=z=0$.

4.3. Записать в базисе из тригонометрических функций $\{\cos x,\ \sin x\}$ матрицу оператора дифференцирования $D=d/dx$.

4.4. Найти собственные значения и собственные вектора оператора, заданного своей матрицей $A=\begin{Vmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{Vmatrix}$.

4.5. Найти вид оператора с матрицей Паули $\sigma_x=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в собственном базисе оператора с матрицей Паули $\sigma_y=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

4.6. Найти собственные функции и собственные значения оператора $-i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, где $0\le\varphi<2\pi$.

4.7. Найти сопряжённый оператор к линейному оператору A, осуществляющему поворот на угол $\varphi=2\pi/3$ вокруг прямой $x_1=x_2=x_3$ в пространстве R_3.

5. Квадратичные формы.

5.1. Привести квадратичную форму от трёх переменных $A(\mathbf{x})=3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$ в пространстве R_3 к каноническому виду методом Лагранжа, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса.

5.2. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x})=\lambda x_1^2-4x_1x_2+(\lambda+3)x_2^2$ является (а) положительно определённой и (б) отрицательно определённой?

5.3. Пусть $A(\mathbf{x})$ - квадратичная форма в пространстве R_n. Является ли подпространством R_n множество M векторов $\mathbf{x}\in R_n$ таких, что $A(\mathbf{x})\ge 0$? Рассмотреть в качестве примера форму $A(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-x_3^2$ в трёхмерном пространстве.

6.4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

1. Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 №55-ОД.

2. Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Д.В. Беклемишев, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., Наука, 1987, 320 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, абонемент физического факультета, 30 экз.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, Линейная алгебра: учеб., М.: Физматлит, 2008, 280 с. https://e.lanbook.com/book/2178
3. Д.В. Хомицкий, А.С. Гаревский, А.В. Тележников, Сборник задач по линейной алгебре, ННГУ, 2006, 51 с. http://www.unn.ru/books/met_files/Linprob.pdf
4. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров, Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, М., Наука, 2003, 496 с. Фонд Фундаментальной библиотеки ННГУ, 30 экз.
5. А.Г. Курош, Курс высшей алгебры: учеб., Санкт-Петербург, Лань, 2013, 432 с. https://e.lanbook.com/book/30198

б) дополнительная литература:

И.В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре, учеб. пособие, Санкт-Петербург, Лань, 2010, 480 с. https://e.lanbook.com/book/529

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

Интернет-ресурсы Фундаментальной библиотеки ННГУ http://www.lib.unn.ru/.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально-техническое обеспечение дисциплины обусловлено наличием учебных аудиторий для проведения занятий, оборудованных специализированной мебелью, меловыми или магнитно-маркерными досками для представления учебной информации большой аудитории. Ресурс мела и маркеров для доски в учебных аудиториях регулярно возобновляется.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся (на базе Фундаментальной библиотеки ННГУ) оснащены компьютерной техникой с подключением к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ННГУ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 03.03.02 Физика.

Автор:

доцент кафедры теоретической физики
физического факультета,
к. ф.-м. н., доцент _____ / Хомицкий Д.В. /

Рецензент:

И.о. зав. кафедрой теоретической физики
физического факультета,
д. ф.-м. н., доцент _____ / Бурдов В.А. /

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии физического факультета ННГУ от 30 августа 2017 года, протокол № б/н

Председатель
Учебно-методической комиссии
физического факультета ННГУ _____ / Сдобняков В.В. /