

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «16» июня 2021 г. № 8

**Рабочая программа дисциплины**

**Тензорное исчисление**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

специалитет

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2021 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений

| № варианта | Место дисциплины в учебном плане образовательной программы                              | Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД   |
|------------|---|---|
| 2          | Блок 1. Дисциплины (модули)<br>Часть, формируемая участниками образовательных отношений | Дисциплина Б1.В.ДВ.01.01, «Тензорное исчисление» относится к части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальная математика и механика, формируемой участниками образовательных отношений. |

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)   | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции   |  | Наименование оценочного средства                                   |
|---|---|--|--|
|   | Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)  | Результаты обучения по дисциплине**  |  |
| <b>ПК-2.</b> Способен самостоятельно анализировать поставленную задачу, выбирать корректные методы её решения, применять математически сложные алгоритмы в современных специализированных программных комплексах, реализовывать в них новые алгоритмы | <b>ПК-2.1.</b> Знает теоретические основы и методологию построения решений фундаментальных задач математики и механики, основы информационных технологий.<br><b>ПК-2.2.</b> Умеет осуществлять анализ и выбор методов и алгоритмов решения задач профессиональной деятельности.<br><b>ПК-2.3.</b> Владеет навыками решения задач математики и механики в соответствии с выбранным методом и построенным алгоритмом с использованием современных программных комплексов. | <b>Знает</b> основные понятия тензорного исчисления, технологию доказательства утверждений и преобразования выражений.<br><b>Умеет</b> осуществлять анализ и выбор методов решения задач тензорного исчисления.<br><b>Владеет навыками</b> применения базовых знаний и современного математического аппарата тензорного исчисления при решении теоретических и прикладных задач с использованием современных программных комплексов. | <i>Собеседование<br/>Контрольная работа<br/>Контрольная работа</i> |

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Трудоемкость дисциплины

|                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
|                           | <b>очная форма обучения</b> |
| <b>Общая трудоемкость</b> | <b>3 з.е.</b>               |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Часов по учебному плану</b>                 | <b>108</b> |
| <b>в том числе</b>                             |            |
| <b>аудиторные занятия (контактная работа):</b> |            |
| - занятия лекционного типа                     | <b>32</b>  |
| - занятия семинарского типа                    | <b>32</b>  |
| - занятия лабораторного типа                   |            |
| - текущий контроль (КСР)                       | <b>1</b>   |
| <b>самостоятельная работа</b>                  | <b>43</b>  |
| <b>Промежуточная аттестация – зачет</b>        |            |

### 3.2. Содержание дисциплины

| Очная форма обучения   |  |                   |   |    |   |       |                           |
|--|--|-------------------|---|----|---|-------|---------------------------|
| №  | Наименование разделов и тем дисциплины | Всего<br>(часы)   | в том числе   |    |   |       | СР <sup>1</sup> ,<br>часы |
|  |  |                   | Контактная работа<br>(работа во взаимодействии с<br>преподавателем), часы |    |   |       |                           |
|  |  |                   | из них  |    |   | Всего |                           |
| ЗЛсТ <sup>2</sup>  | ЗСеТ <sup>3</sup>                      | ЗЛаТ <sup>4</sup> |   |    |   |       |                           |
| 1.   | Введение                               | 4                 | 2   |    |   | 2     | 2                         |
| 2.   | Тензорная алгебра                      | 32                | 8   | 12 |   | 20    | 12                        |
| 3.   | Дифференциальное исчисление            | 28                | 8   | 10 |   | 18    | 10                        |
| 4.   | Интегральное исчисление                | 26                | 8   | 8  |   | 16    | 10                        |
| 5.   | Приложения                             | 10                | 2   | 2  |   | 4     | 6                         |
| 6.   | Тензорные функции                      | 4                 | 2   |    |   | 2     | 2                         |
| 7.   | Обзор курса                            | 3                 | 2   |    |   | 2     | 1                         |
|  | Текущий контроль (КСР)                 | 1                 |   |    |   | 1     |                           |
|  | ИТОГО                                  | 108               | 32  | 32 | 0 | 65    | 43                        |
| <sup>1</sup> Самостоятельная работа обучающегося.<br><sup>2</sup> Занятия лекционного типа.<br><sup>3</sup> Занятия семинарского типа.<br><sup>4</sup> Занятия лабораторного типа. |  |                   |   |    |   |       |                           |

#### **Краткое содержание разделов и тем дисциплины**

- Введение. Математическое моделирование. Евклидово ориентированное пространство. Системы координат. Инвариантность. Физические величины и их тензорные свойства. Скаляры, векторы, тензоры. Краткие исторические сведения.
- Тензорная алгебра. Тензоры нулевого ранга – скаляры. Тензоры 1-го ранга – векторы (определение, полярные и аксиальные, сложение, умножение вектора на скаляр, линейное /векторное/ пространство, линейная зависимость векторов, базис и размерность векторного пространства, системы координат, скалярное, векторное, смешанное умножение векторов, координаты вектора, некоторые формулы векторной алгебры). Появление тензоров 2-го ранга (математическое, механическое: тензор инерции, тензор напряжений). Тензоры 2-го ранга (определения, алгебраические операции: транспонирование, сложение, умножения, двойные умножения, свойства и характеристики: след, векторный инвариант, определитель, единичный, обратный, взаимный, симметричный, антисимметричный, шаровой, девиатор, ортогональный, положительно определённый, собственные числа и собственные векторы, спектральное разложение, возведение в степень, теорема Гамильтона-Кэли, инварианты, тензорный базис, координаты тензора, преобразование координат, тензорный признак /теорема деления тензоров/, тензорная поверхность). Тензоры высших рангов (определения, тензор Леви-Чивиты, символы Леви-Чивиты, символы Риччи, изотропные, гиротропные).
- Дифференциальное исчисление. Тензорное поле. Криволинейные системы координат. Радиус-вектор. Основной и взаимный базис. Набла-оператор Гамильтона. Градиент тензорного поля (скалярное, векторное, тензорное высшего ранга). Потенциальное поле. Линейный тензор деформации. Тензор спина. Вихрь векторного поля. Формула Гельмгольца. Вычисление градиента. Дивергенция тензорного поля. Соленоидальное поле. Вычисление дивергенции. Ротор (вихрь) векторного поля. Вычисление ротора. Двукратное дифференцирование.

Оператор Лапласа. Тензор несовместимости. Дифференцирование базисных векторов. Символы Кристоффеля.

4. Интегральное исчисление. Формулы Стокса. Формулы Остроградского-Гаусса. Формулы Грина. Формулы Гаусса.
5. Приложения. Уравнения движения абсолютно твёрдого тела. Моделирование поведения сплошной среды.
6. Тензорные функции тензорного аргумента. Аналитические функции тензора 2-го ранга. Изотропные функции. Дифференцирование по тензорному аргументу. Производные от инвариантов тензора 2-го ранга.
7. Обзор курса. Подготовка к промежуточной аттестации.

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (зачет).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств включает: контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме *задач (практических заданий), контрольных работ* и контрольные материалы для проведения промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к *зачёту*.

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Шкала оценивания сформированности компетенций |                   | Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)  |   |  |
|---|-------------------|---|---|--|
|   |                   | Знания  | Умения  | Навыки   |
| <b>плохо</b>                                  | <b>не зачтено</b> | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа                  | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа |
|   |                   | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.  | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.                               | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.                 |
| <b>удовлетворительно</b>                      | <b>зачтено</b>    | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.   | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами                        |

| Шкала оценивания сформированности компетенций |  | Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)                                |   |  |
|---|--|---|---|--|
|   |  | <u>Знания</u>   | <u>Умения</u>   | <u>Навыки</u>  |
| <b>хорошо</b>                                 |  | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок       | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами. |
| <b>очень хорошо</b>                           |  | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.                      | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.  |
| <b>отлично</b>                                |  | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.                              | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.          | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.        |
| <b>превосходно</b>                            |  | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.  | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов                                    | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач                        |

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка  |                     | Уровень подготовки   |
|---------|---------------------|--|
| зачтено | превосходно         | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»   |
|         | отлично             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»                     |
|         | очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»           |
|         | хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»                       |
|         | удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| зачте   | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»  |

| Оценка |       | Уровень подготовки                                      |
|--------|-------|---|
|        | плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

| №   | Вопрос  | Код формируемой компетенции |
|-----|---|-----------------------------|
| 1.  | Полярные и аксиальные векторы.  | ПК-2                        |
| 2.  | Линейная зависимость векторов.  | ПК-2                        |
| 3.  | Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора в базисе. | ПК-2                        |
| 4.  | Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.                    | ПК-2                        |
| 5.  | Скалярное, векторное, тензорное произведение тензоров.                    | ПК-2                        |
| 6.  | Множественные произведения тензоров.                                      | ПК-2                        |
| 7.  | Свойства и характеристики тензоров 2-го ранга.                            | ПК-2                        |
| 8.  | Тензорный базис. Координаты тензора в базисе.                             | ПК-2                        |
| 9.  | Градиент, дивергенция, ротор тензорного поля.                             | ПК-2                        |
| 10. | Дифференцирование базисных векторов.                                      | ПК-2                        |
| 11. | Интегральные формулы.   | ПК-2                        |
| 12. | Аналитические функции тензора 2-го ранга.                                 | ПК-2                        |

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-2

- Найти  $\text{tr}[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^T]$ , где  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  – тензоры второго ранга.
- Доказать  $\text{tr}(\nabla \times \mathbf{Q}) = \nabla \cdot (\mathbf{Q}_\times)$ , где  $\mathbf{Q}$  – тензор второго ранга.
- Вычислить интеграл по замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей область  $V$ ,

$$\oint_S \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} ds,$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности  $S$ , внешний по отношению к области  $V$ .

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

| №  | а) основная литература:   | К-во <sup>1</sup> |
|----|---|-------------------|
| 1. | Элементы тензорного исчисления в евклидовом пространстве: тензорная алгебра. Жидков А.В., Шабаров В.В. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с. ( <a href="http://www.unn.ru/books/met_files/ETCES.pdf">http://www.unn.ru/books/met_files/ETCES.pdf</a> ). | Э                 |
| 2. | Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И.Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с. ( <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lure1980ru.djvu">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Lure1980ru.djvu</a> ). Приложения. Тензорная алгебра и тензорный анализ.с.422-495.  | Э, 3 экз.         |
| 3. | Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П.А.Жилин. – СПб.: Нестор, 2001. – 276 с. ( <a href="http://teormeh.spbstu.ru/Zhilin_New/Vec_Ten_Book.htm">http://teormeh.spbstu.ru/Zhilin_New/Vec_Ten_Book.htm</a> ).   | Э                 |
| 4. | Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа / В.А.Пальмов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 109 с. ( <a href="http://www.fea.ru/spaw2/uploads/files/Palmov/p_109.pdf">http://www.fea.ru/spaw2/uploads/files/Palmov/p_109.pdf</a> ).   | Э                 |

<sup>1</sup>Указывается количество экземпляров в библиотеке ННГУ. Если издание доступно в электронном виде (указана ссылка), указывается буква «Э».

| №  | а) основная литература:  | К-во <sup>1</sup> |
|----|--|-------------------|
| 5. | Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. / Дж.Мейз. – М.: Мир, 1974. – 319 с. ( <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Mase1974ru.djvu">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Mase1974ru.djvu</a> ). | Э                 |

| №  | б) дополнительная литература:  | К-во <sup>1</sup> |
|----|--|-------------------|
| 1. | Тензорная алгебра. Часть I / Сост. А.В.Баландин, О.А.Муляр, А.Г.Разуваев. – Н.Новгород: ННГУ, 2004. 14 с. ( <a href="http://www.unn.ru/books/met_files/tenz_alg.zip">http://www.unn.ru/books/met_files/tenz_alg.zip</a> ).   | Э                 |
| 2. | Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Малышев А.И., Максимова Г.М. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 101 с. ( <a href="http://www.unn.ru/books/met_files/VTa4phys.pdf">http://www.unn.ru/books/met_files/VTa4phys.pdf</a> ). | Э                 |
| 3. | Сборник контрольных заданий по курсу векторного и тензорного анализа: Учебное пособие. / Г.М.Максимова, А.И.Малышев, И.Л.Максимов. – Н. Новгород: издательство ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2002. – 33 с. ( <a href="http://phys.unn.ru/docs/VTa.pdf">http://phys.unn.ru/docs/VTa.pdf</a> ).                | Э                 |
| 4. | Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К.Трусделл. – М.: Наука, 1975. – 592 с. ( <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Truesdell1975ru.djvu">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Truesdell1975ru.djvu</a> ).   | Э                 |
| 5. | Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды: учеб.пособие: в 4 т. / Ю.И.Димитриенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. Т.1: Тензорный анализ. – 463 с.   | 1                 |
| 6. | Димитриенко Ю. И. - Тензорное исчисление: учеб.пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 2001. - 575 с.   | 1                 |
| 7. | Зубов Л.М. Тензорное исчисление / Л.М.Зубов, М.И.Карякин. – М.: Вузовская книга, 2006. – 120 с.  | –                 |
| 8. | Коренев Г.В. Тензорное исчисление. / Г.В.Коренев. – М.: Изд-во МФТИ, 1996. – 240 с.  | –                 |

| №  | в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы<br>(в соответствии с содержанием дисциплины)  | «Л»<br>или<br>«С» <sup>2</sup> |
|----|---|--------------------------------|
| 1. | <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm</a> | С                              |
|    |   |                                |

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики  
от 2 июня 2021 года, протокол № 8.

<sup>2</sup>Указывается буква «Л», если программное обеспечение – лицензионное, или «С» – в свободном доступе.

Автор(ы)

к.т.н., доцент  
Жидков А.В.

Рецензент(ы)

Заведующий кафедрой ТКЭМ  
теоретической, компьютерной и  
экспериментальной механики

д.ф.-м.н., профессор  
Игумнов Л.А.