МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

Директор _____ Гергель В.П.

«____» _____ 201_ г.

Рабочая программа дисциплины

Эргодическая теория

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Направление подготовки
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы
Общий профиль

Квалификация (степень)
бакалавр

Форма обучения
очная

Нижний Новгород

2017 год

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Эргодическая теория» относится к Дисциплинам по выбору государственного образовательного стандарта по направлению **02.03.01 Математика и компьютерные науки** и преподается в 8 семестре для бакалавров очной формы обучения. Индекс дисциплины Б1.В.ДВ.09.01

При освоении данной дисциплины студенту необходимы базовые знания по математическому анализу, дифференциальной геометрии и топологии, фундаментальной и компьютерной алгебре.

Цель освоения дисциплины

Содержание дисциплины «Эргодическая теория» направлено на ознакомление студентов, специализирующихся в области математики, с актуальным направлением в теории динамических систем, которое связывает динамические и вероятностные подходы при исследовании сложного поведения траекторий. Основное внимание уделяется современным методам эргодической теории, таким как энтропийная теория, конструкции инвариантных мер, марковские разбиения и меры и др.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций**
ОК-7- способность к самоорганизации и к самообразованию	***ЗНАТЬ*** *З1(ОК-7) как решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным:* *З2(ОК-7) как анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления.* ***УМЕТЬ*** *У1(ОК-7) анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ОК-7) способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.*
ОПК-1 *готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной*	***ЗНАТЬ*** *З1(ОПК-1) основные определения и формулировки теорем, излагаемые в настоящем курсе.* ***УМЕТЬ*** *У1(ОПК-1) применять полученные знания при исследовании конкретных динамических систем.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ОПК-1) методами конструирования математических моделей рассматриваемых прикладных задач, и делать заключение о характере реального процесса на основе анализа.*

математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности.	
ПК-1 *способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области*	***ЗНАТЬ*** *З1 (ПК-1) принципы определения общих форм и закономерностей эргодической теории* ***УМЕТЬ*** *У1 (ПК-1) определять общие формы и закономерности в области эргодической теории* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1 (ПК-1) опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории*

3. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 4 зачетных единицы, всего 144 ч., из которых 50 ч. составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (24 ч. занятий лекционного типа, 24 ч. занятий семинарского типа, 2 ч. мероприятия промежуточной аттестации), 94 ч. составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. включая 36 часов подготовки к экзамену).

Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, **форма промежуточной аттестации по дисциплине**	**Всего (часы)**	в том числе					
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					**Самостоятельная работа студента часы**
		Занятия лекционного типа	**Практические занятия**	**Лабораторные работы**	**Консультации индивидуальные**	**Всего контактных часов**	**СРС**
Введение.	**12**	**2**	**2**			**4**	**8**
Символическая динамика	**35**	**6**	**6**			**12**	**23**
Энтропийная теория дискретных динамических систем	**31**	**6**	**6**			**12**	**19**

Классические теоремы эргодической теории.	**35**	**6**	**6**			**12**	**23**
Эргодическая теория одномерных отображений	**29**	**4**	**4**			**8**	**21**
Промежуточная аттестация							
В т.ч. текущий контроль	**2**						

Содержание дисциплины Эргодическая теория

I. Введение

1. Исторический обзор эргодической теории. Динамическая система как действие группы на фазовом пространстве. Потоки и каскады, динамические системы с более общей группой преобразований.
2. Измеримое пространство и сохраняющие меру преобразования на нем. Примеры динамических систем в эргодической теории.

II. Символическая динамика .

1. Схема применения символической динамики в конкретных динамических системах. Пространство символических последовательностей и его свойства. Отображение сдвига на пространстве односторонних и двусторонних символических последовательностей (сдвиги Бернулли).
2. Топологические марковские цепи и их свойства. Разложимые и неразложимые топологические марковские цепи, периодические и ациклические цепи. Примеры.
3. Теорема Перрона-Фробениуса.
4. Применение теоремы Перрона-Фробениуса для подсчета асимптотики периодических точек. Динамическая дзета-функция Артина-Мазура.

III. Энтропийная теория дискретных динамических систем

1. Определение топологической энтропии непрерывного отображения компакта при помощи открытых покрытий (по Адлеру-Конхейму-МакЭндрю). Основные свойства топологической энтропии.
2. Топологическая энтропия как инвариант топологической сопряженности. Образующие покрытия и их применение для вычисления топологической энтропии.
3. Примеры вычисления топологической энтропии для топологических Марковских цепей и одномерных отображений.
4. Определение топологической энтропии при помощи разделенных и стягивающих подмножеств (по Боуэну). Эквивалентность различных определений.
5. Метрическая энтропия и её свойства. Вариационный принцип. Мера с максимальной энтропией.

IV.Классические теоремы эргодической теории

1. Теорема Пуанкаре о возвращении и её обобщения.
2. Теорема Крылова-Боголюбова о существовании и построении инвариантной меры. Строго эргодические динамические системы.
3. Эргодические меры и преобразования. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина и её приложения.

4. Свойства сильного и слабого перемешивания. Примеры.

V. Эргодическая теория для одномерных необратимых отображений

1. Кусочно-монотонные отображения: символическая динамика и существование инвариантных мер.
2. Инвариантные меры, абсолютно непрерывные по отношению к мере Лебега.
3. Кусочно-монотонные отображения постоянного наклона.

4. Образовательные технологии

Основной формой обучения является лекционные , семинарские занятия и консультации. При самостоятельной работе и подготовке к зачету студенты имеют доступ к авторскому электронному курсу «Эргодическая теория», размещенному на сайте Нижегородского университета в разделе электронного обучения http://www.unn.ru/e-learning/ .(Электр. ресурс. Доступ после регистрации по паролю).

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

a. Виды самостоятельной работы студентов

Изучение литературы, выступление на семинарах, подготовку тестированию, подготовку к экзаменам.

b. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

Материалы курса лекций «Эргодическая теория » http://www.unn.ru/e-learning/

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

6.1 **Перечень компетенций выпускников** образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Оценка уровня формирования компетенции ОПК-1

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
ЗНАТЬ *З1(ОПК-1) основные определения и формулировки теорем, излагаемые в настоящем курсе.* ***УМЕТЬ*** *У1(ОПК-1) применять полученные знания при исследовании конкретных динамических систем.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ОПК-1)методами*	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.	Плохой уровень формирования компетенции. 0-19 баллов - «Плохо»
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»

конструирования математических моделей рассматриваемых прикладных задач, и делать заключение о характере реального процесса на основе анализа	**Уметь (**У1) с рядом негрубых ошибок. **Владеть** *способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.*	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Уметь (У1) с незначительными погрешностями. **Владеть** *способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.*	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Уметь (У1) без ошибок и погрешностей. **Владеть** *способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.*	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Уметь (У1.) **Владеть** *способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.*	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	Знать основной и дополнительный материал без ошибок и погрешностей. **Уметь (**У1) Свободно. **Владеть** *способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.*	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

Оценка уровня формирования компетенции ОК-7

Индикаторы компетенции	**Критерии оценивания (дескрипторы)**	**Шкала оценивания**
ЗНАТЬ *З1(ОК-7) как решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным:* ***З2(ОК-7)*** *как анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления.* ***УМЕТЬ*** *У1(ОК-7) анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ОК-7) способностью*	Отсутствие логических связей, путаница в понятиях.	Плохой уровень формирования компетенции. 0-19 баллов - «Плохо»
	Наличие грубых ошибок при изложении материала, даже в тех ситуациях, когда преподаватель указывает на ошибки и поправляет.	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	Возможность исправить грубые ошибки в ситуации, когда	Удовлетворительный уровень формирования

уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему..	преподаватель указывает на них.	компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Наличие погрешностей (пробелов) при решении задач и формулировке результатов при владении большинством основных навыков.	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Возможность без ошибок и пробелов в рассуждениях продемонстрировать результаты в стандартных ситуациях	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Знание основных методов и умений, возможность без ошибок и пробелов в рассуждениях продемонстрировать результаты в стандартных ситуациях и продвинуться в нестандартных.	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	Свободное владение материалом, возможность справиться без ошибок и пробелов с нестандартными задачами, в том числе связанными с приложениями. **Владеть** всеми навыками, демонстрируя их в стандартных и нестандартных ситуациях.	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

Оценка уровня формирования компетенции ПК-1

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
ЗНАТЬ *З1(ПК-1) принципы определения общих форм и закономерностей эргодической теории.* ***УМЕТЬ*** *У1(ПК-1) определять общие формы и закономерности в области эргодической теории.* ***ВЛАДЕТЬ*** *В1(ПК-1) опытом*	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.	Плохой уровень формирования компетенции. 0-19 баллов - «Плохо»
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»

определения общих форм и закономерностей эргодической теории	**Уметь (**У1) с рядом негрубых ошибок. **Владеть** *опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.*	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Уметь (У1) с незначительными погрешностями. **Владеть** *опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.*	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Уметь (У1) без ошибок и погрешностей. **Владеть** *опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.*	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Уметь (У1.) **Владеть** *опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.*	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	Знать основной и дополнительный материал без ошибок и погрешностей. **Уметь (**У1) Свободно. **Владеть** *опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.*	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

Карта компетенций для оценивания умений и навыков

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»
Умения У1(ОПК-1), У1(ОК-7), У1(ПК-1)	отсутствует способность решения стандартных	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	способность решения основных стандартных задач с негрубыми ошибками	способность решения всех стандартных задач с незначительными погрешностями	способность решения всех стандартных задач без ошибок и погрешностей	Способность решения стандартных и некоторых нестандартных задач	способность решения стандартных задач и широкого круга нестандартных

	задач						задач
Навыки В1(ОПК-1), В1(ОК-7), В1(ПК-1)	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех основных навыков, продемонстрированных в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных и нестандартных ситуациях
	0-19	20-49	50-59	60-79	80-89	90-99	100

6.2 Описание шкал оценивания

Для оценивания результатов учебной деятельности студентов при изучении дисциплины «Эргодическая теория » используется балльная система оценки учебной работы студентов.

По результатам промежуточной аттестации в виде экзамена проставляются оценки «Превосходно», «Отлично», «Очень хорошо», «Хорошо», «Удовлетворительно», «Неудовлетворительно», «Плохо» в соответствии с таблицей (ниже).

Соответствие между баллами и качественной оценкой

Активности	Баллы	Качественная оценка
● Выполнение домашних работ (100%) ● ответ вопросы согласно дескрипторам	98-100	Превосходно
● Выполнение домашних работ (100%) ● ответ вопросы согласно дескрипторам	91-98	Отлично
● Выполнение домашних работ (100%) ● ответ вопросы согласно дескрипторам,	80 – 89	Очень хорошо
● Выполнение домашних работ (100%) ● ответ вопросы согласно дескрипторам,	60-79	Хорошо
● Выполнение домашних работ (100%) ● ответ вопросы согласно дескрипторам,	50 – 59	Удовлетворительно
● Выполнение домашних работ (60%)	20-49	Неудовлетворительно

• ответ вопросы согласно дескрипторам,		
• Выполнение домашних работ (50%) • ответ вопросы согласно дескрипторам	0-19	Плохо

6.3 Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

-устные ответы

- письменные ответы на вопросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические работы, включающие постановку одной сложной учебной задачи в виде краткой формулировки действий, которые следует выполнить, и описания результата, который нужно получить.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции

Примеры заданий для оценки компетенции ОК-7

1. Prove that if a homeomorphism: $X \to Y$ provides conjugacy for two invertible maps $f : X \to X$ and $g : Y \to Y$, then h also provides conjugacy for the induced cascades, i.e. prove that $h \circ f = g \circ h$ implies $h \circ f^n = g^n \circ h$ for every $n \in \mathbf{Z}$.

2. Prove that cascades induced by the following two maps f and g are congugate:

a) $f : T^1 \to T^1$, where $T^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ and f is given by $f(x) = x + \alpha \pmod 1$;

b) $f : S^1 \to S^1$, where $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ and g is given by $g(z) = z \cdot e^{2\pi i\alpha}$.

Примеры заданий для оценки компетенций ОПК-1, ПК-1

1. Что такое динамическая система с топологической точки зрения? Что такое каскады и потоки?
2. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем?

Пример экзаменационного билета вопросов, выносимых на экзамен

Дисциплина Эргодическая теория

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Что такое динамическая система с топологической точки зрения? Что такое каскады и потоки? (ОПК-1, ПК-1)
2. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем? (ОК-7, ПК-1)

Зав. кафедрой _____

Экзаменатор _____

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утверждённое приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. №55-ОД.

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015г.№247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература

1. Материалы сайта http://www.unn.ru/e-learning/ - курс Эргодическая теория
2. **Каток А., Хасселблатт Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений**, МЦНМО, 2005 http://libgen.io/book/index.php?md5=6D772D928188481C16E64C57CB7D06D8
3. **Биллингслей П. Эргодическая теория и информация, Мир, 1969,** http://libgen.io/ads.php?md5=D3979D706A0AA2F6F5F82FF4443A070B

б) дополнительная литература

1. Michael Blank. **Ergodic averaging with and without invariant measures https://arxiv.org/pdf/1709.06327.pdf**

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет». Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор _____ М.И. Малкин

Рецензент _____

Заведующий кафедрой_____ Д.В.Баландин

Программа одобрена методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

от _____ года, протокол № _____.