МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

|  |
| --- |
| **Институт информационных технологий, математики и механики**  |

 (факультет / институт / филиал)

|  |
| --- |
| УТВЕРЖДАЮ: |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Директор |  | Гергель В.П. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| « |  | » |  |  | 2017 г. |

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

|  |
| --- |
| **Геометрия многообразий** |

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

|  |
| --- |
| **бакалавриат** |

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

|  |
| --- |
| **01.03.01 Математика** |

 (указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

|  |
| --- |
| **Математика (Общий профиль)** |

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)

|  |
| --- |
| **Бакалавр** |

(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения

|  |
| --- |
| **очная** |

 (очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2017

**1.Место и цели дисциплины (модуля) в структуре ОПОП.** Дисциплина «Геометрия многообразий» относится к вариативной части ОПОП по направлению «Математика», является дисциплиной по выбору, изучается в шестом семестре бакалавриата (код дисциплины Б1.В.ДВ.03.01).

**Целью освоения дисциплины (модуля)** «Геометрия многообразий» является формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по основным разделам теории гладких многообразий и геометрических структур на них, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

**2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю),** соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

|  |  |
| --- | --- |
| **Формируемые компетенции**(код компетенции, уровень освоения – при наличии в карте компетенции) | **Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций** |
| *ОПК-1****готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности****Базовый уровень* | *У1 (ОПК-1)* ***Уметь***четко формулировать теоремы, решать теоретические и вычислительные задачи, обнаруживать связи со смежными темами из других разделов математики.*З1 (ОПК-1)* ***Знать***основные понятия, проблемы, методы и результаты геометрии многообразий, области их применения *В1 (ОПК-1)* ***Владеть*** навыками решения задач по курсу геометрии многообразий, опытом их применения. |
| *ПК-3****способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата****Базовый уровень* | *У1 (ПК-3)* ***Уметь***доказыватьтеоремы, формулировать результаты решения задач, обосновывать решения, обнаружить их следствия, связи с ранее решенными задачами и возможные обобщения*З1 (ПК-3)* ***Знать***терминологию, аппарат и методы математических доказательств, используемые в геометрии многообразий*В1 (ПК-3)* ***Владеть***навыками строгих математических доказательств при решении теоретических задач |

**3. Структура и содержание дисциплины (модуля)** «Геометрия многообразий»

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетные единицы, всего 108 ч., из которых 32 ч. составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (30 ч. занятий лекционного типа, 2 часа промежуточной аттестации), 76 ч. составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. 36 часов подготовки к экзамену).

**Содержание дисциплины (модуля)** *(структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий)*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *№**п/п* | *Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)* | *Семестр* | *Часов* |
| *Всего* | *В том числе* |
| *Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**из них* | *Самостоятельнассамостоятельная работа обучающегося* |
| *Занятия лекционного типа* | *Занятия семинарского типа* | *Занятия лабораторного типа* |  | *Всего* |  |
| *Очная* | *Очная* | *Очная* | *Очная* |  | *Очная* |  |
| 1. | **Гладкие многообразия и гладкие отображения.** Карты, атласы, гладкие структуры. Гладкие отображения многообразий. Касательные векторы и касательные пространства, голономный базис. Дифференциал гладкого отображения. Регулярные и критические точки. Подмногообразия гладкого многообразия. Прямые произведения гладких многообразий. Гладкие расслоения. Группы Ли.  | 6 | 24 | 6 |  |  |  | 6 | 18 |
| 2 | **Ориентации и ориентируемость.** Ориентирующие атласы и ориентации. Теорема о числе ориентаций. Ориентируемость неявно заданных многообразий и групп Ли. Примеры неориентируемых многообразий. |  | 18 | 4 |  |  |  | 4 | 14 |
| 3 | **Тензорные расслоения и тензорные поля.** Преобразования голономных базисов и координат векторов при замене карт. Кокасательное пространство и его базис. Касательное и кокасательное расслоения. Векторные поля на многообразиях и их гладкость. Скобки Ли векторных полей. Алгебры Ли. Тензоры и операции над ними. Преобразования компонент тензоров при замене карт. Построение тензорных расслоений. Тензорные поля и их гладкость. Симметричные и кососимметричные формы. | 6 | 24 | 8 |  |  |  | 8 | 16 |
| 4. | **Основные геометрические структуры на многообразиях.**Римановы метрики и римановы многообразия.Аффинные связности. Коэффициенты аффинной связности. Тензор кручения и его компоненты. Тензор кривизны. Ковариантное дифференцирование полилинейных форм. Связности Леви-Чивита риманова многообразия, теорема существования и единственности. Векторные поля вдоль гладкой кривой на многообразии. Ковариантное дифференцирование векторных полей вдоль кривой. Параллельные векторные поля. Параллельный перенос. Группы голономии аффинной связности. Локально евклидовы римановы многообразия, их критерии. Геодезические на римановых многообразиях. Внутренняя метрика. Полнота. Теорема Хопфа-Ринова. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. | 6 | 40 | 12 |  |  |  | 12 | 28 |
|  | **В т.ч. текущий контроль** | 6 | 2 |  |  |  |  |  |  |
|  | **Промежуточная аттестация: экзамен** |

Текущий контроль успеваемости проходит в рамках групповых или индивидуальных консультаций. Промежуточный контроль осуществляется на экзамене.

**4. Образовательные технологии.**

Используются образовательные технологии в форме лекций.

Лекционные занятия в основном проводятся в форме лекции-информации. Они ориентированы на изложение и объяснение студентам научной информации, подлежащей осмыслению (на самой лекции и в ходе самостоятельной работы) и запоминанию. Также предполагается разбор большого числа примеров и задач с вовлечением в процесс студентов.

**5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

**5.1. Виды самостоятельной работы студентов**

* Выполнение домашних практических заданий.
* Подготовка к промежуточной аттестации в форме экзамена.

**5.2. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов**

Учебники, учебные пособия:

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1. - М.: Наука. - 1981. - 344 с. (42 экз.)
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука. – 1979, 1986. - 759 с. (86 экз.)

**6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю**)

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

*ОПК-1****готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности***

|  |  |
| --- | --- |
| Индикаторыкомпетенции | Критерии оценивания (дескрипторы) |
| плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
| Знания*Знать* основные понятия, проблемы, методы и результаты геометрии многообразий, области их применения  | полное отсутствие знаний материала | наличие грубых ошибок в основном материале  | знание основного материала с рядом негрубых ошибок | знание основного материалом с рядом заметных погрешностей | знание основного материала с незначительными погрешностями | знание основного материала без ошибок и погрешностей | знание основного и дополнительным материала без ошибок и погрешностей |
| Умения*Уметь* четко формулировать теоремы,решать теоретические и вычислительные задачи, обнаруживать связи со смежными темами из других разделов математики | полное отсутствие умений | грубые ошибки при формулировке теорем и решении задач | умение формулировать теоремы и решать вычислительные задачис рядом негрубых ошибок | умение формулировать теоремы и решать вычислительные задачипри наличии заметных погрешностей | умение формулировать теоремы и решать вычислительные и теоретические задачипри наличии несущественных погрешностей | умение четко формулировать теоремы и решать теоретические и вычислительные задачибез ошибок и погрешностей  | умение четко формулировать теоремы и решать теоретические и вычислительные задачи без погрешностей, обнаруживать связи со смежными темами из других разделов математики |
| Навыки*Владеть* навыками решения задач по курсу геометрии многообразий, опытом их применения  | полное отсутствие навыков  | отсутствие навыковрешения большинства типов задач | наличие навыков решения только части вычислительных задач  | наличие навыков решения большинства вычислительных задач  | наличие навыков решения большинства вычислительных и части теоретических задач  | владение навыкамрешения всех вычислительных и большинства теоретических задач  | владение навыкамрешения всех вычислительных и теоретических задач, наличие опыта их применения в смежных областях  |
| Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий | 0 – 10 % | 11 – 30 % | 31 – 50 % | 51-70 % | 71 – 85 % | 86 – 99 % | 100% |

*ПК-3****способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата***

|  |  |
| --- | --- |
| Индикаторыкомпетенции | Критерии оценивания (дескрипторы) |
| плохо | неудовлетворительно | удовлетворительно | хорошо | очень хорошо | отлично | превосходно |
| Знания*Знать* терминологию, аппарат и методы математических доказательств, используемые в геометрии многообразий | полное отсутствие знаний  | наличие грубых ошибок в основном материале  | знание основного материала с рядом негрубых ошибок | знание основного материалом с рядом заметных погрешностей | знание основного материала с незначительными погрешностями | знание основного материала без ошибок и погрешностей | знание основного и дополнительным материала без ошибок и погрешностей |
| Умения*Уметь* доказывать теоремы, формулировать результаты решения задач, обосновывать решения, обнаруживать их следствия, связи с ранее решенными задачами и возможные обобщения | полное отсутствие умений | грубые ошибки при формулировке результатов решения задач, полное неумение обосновывать решения | умение формулировать результаты решения задач и обосновывать их с негрубыми ошибками | умение формулировать результаты решения задач и обосновывать их с заметными погрешностями | умение формулировать результаты решения задач и обосновывать их при наличии несущественных погрешностей | умение четко формулировать результаты решения задач и обосновывать их без погрешностей, обнаруживаь их следствия, связи с ранее решенными задачами | умение четко формулировать результаты решения задач и обосновывать их без погрешностей, обнаруживаь их следствия, связи с ранее решенными задачамии возможные обобщения |
| НавыкиВладеть навыками строгих математических доказательств при решении теоретических задач | полное отсутствие навыков  | отсутствие навыковобоснованиярешения большинства типов задач | наличие навыков обоснованиярешения только части задач с негрубыми ошибками | наличие навыковобоснованиярешения большинства задач с существенными погрешностями | наличие навыковобоснованиярешения большинства задач с несущественными погрешностями  | владение навыкамиобоснованиярешения всех теоретических задач с несущественными погрешностями  | владение навыкамиобоснованиярешения всех теоретических задач без погрешностей  |
| Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий | 0 – 10 % | 11 – 30 % | 31 – 50 % | 51-70 % | 71 – 85 % | 86 – 99 % | 100% |

6.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Промежуточный контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде экзамена, на котором определяется:

* уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
* уровень понимания студентами изученного материала
* способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Экзамен включает устную и письменную часть. Устная часть экзамена заключается в ответе студентом на теоретические вопроса курса (с предварительной подготовкой) и последующем собеседовании в рамках тематики курса. Практическая часть экзамена предусматривает решение задач.

Экзамен в 6 семестре

|  |  |
| --- | --- |
| Превосходно | свободное владение основным материалом и владение дополнительным материалом с незначительными ошибками и погрешностями |
| Отлично | свободное владение основным материалом |
| Очень хорошо | достаточное владение основным материалом с незначительными погрешностями |
| Хорошо | владение основным материалом с рядом заметных погрешностей |
| Удовлетворительно | владение минимальным материалом, необходимым по данному предмету, с рядом ошибок |
| Неудовлетворительно | владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка |
| Плохо | отсутствие владения материалом |

Оценки «превосходно», «отлично», «очень хорошо», «хорошо», «удовлетворительно» считаются положительными.

**6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих сформированность компетенций**

Дисциплина формирует базовый уровень компетенций ОПК-1 и ПК-3.

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- собеседование.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания, включающих одну или несколько задач (вопросов)

**Для проведения промежуточного контроля сформированности компетенции используются**: устный опрос, решение практических задач.

**6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.**

**6.4.1. Примеры вопросов к экзамену по дисциплине** *«Геометрия многообразий»*

|  |  |
| --- | --- |
| Вопрос | Код компетенции |
| Дифференциал гладкого отображения и его координатное представление.  | ОПК-1 |
| Построение касательного и кокасательного расслоений. | ПК3 |
| Аффинные связности и формула для вычисления их коэффициентов. | ОПК-1 |
| Теорема существования и единственности связности Леви-Чивита заданного риманова многообразия. | ПК-3 |

**6.4.2. Типовые задания для текущего контроля успеваемости**

**Задачи для быстрой проверки компетенции ОПК-1**

Почему гладкое многообразие $M=\{\left(x,y\right)\in R^{2}∨y=x^{2}\}$ ориентируемо?

Пусть на $M=\left\{0<y<1\right\}$ задана риманова метрика $g=dx⨂dx+2dy⨂dy$. Будет ли риманово многообразие $\left(M,g\right)$ полным?

**Задачи для более глубокой оценки компетенции ОПК-1**

Описать касательные пространства в единице к группам $O\left(n\right)$ и $SL\left(n,R\right)$.

Пусть векторные поля $X,Y$ на многообразии $M=R^{2}$ имеют вид $X\left(x,y\right)=x∂\_{1}+y∂\_{2}$, $Y\left(x,y\right)=y∂\_{1}−x∂\_{2}$ в карте $\left(M,id\right)$. Вычислить скобку Ли $\left[X,Y\right]$. Объяснить полученный результат, опираясь на геометрический смысл скобки Ли.

**Задачи для быстрой проверки компетенции ПК-3**

Доказать, что $M=\{\left(x,y\right)\in R^{2}∨y=x∨\}$ – гладкое многообразие размерности 1.

Пусть $H$ – гладкое векторное поле на $R^{2}$. Доказать, что формула $S\left(X\right)=\left(H,X\right)$ определяет гладкое тензорное поле $S$ типа (1,0) на $R^{2}$.

**Задачи для более глубокой оценки компетенции ПК-3**

Доказать, что отображение $f:SO\left(2\right)\rightarrow SO\left(2\right)$, определенное формулой $f\left(A\right)=A^{−1}$, дифференцируемо. Есть ли у него критические точки?

Для точек $A\in M=SL\left(2,R\right)$ и касательных векторов $B,C\in T\_{A}M$ положим $g\left(B,C\right)=trace\left(BC^{T}\right)$. Доказать, что $g$ – риманова метрика на$M$.

**6.4.3. Примеры заданий (оценочных средств), выносимых на экзамен**

**Задачи для оценки компетенции ОПК-1**

Построить карту на $M=O\left(2\right)$, содержащую единичную матрицу $E$, и найти голономный базис касательного пространства $T\_{E}M$ в этой карте.

Пусть $M=\{\left(x,y\right)\in R^{2}∨y>0\}$ и $g=y\left(dx⨂dx+dy⨂dy\right)$. Написать уравнения геодезических в римановом многообразии $\left(M,g\right)$..

**Задачи для оценки компетенции ПК-3**

Показать, что поверхность $M=\{\left(x,y,z\right)\in R^{3}∨x^{2}+y^{2}−z^{2}=0,z\geq 0\}$ является двумерным гладким многообразием. Будет ли оно подмногообразием пространства $R^{3}$?

Для $a\in M=R^{3}$ и $X,Y\in T\_{a}M$ положим $S\_{a}\left(X,Y\right)=\left[X,Y\right]$. Доказать, что $S:a\rightarrow S\_{a}$ – гладкое тензорное поле типа (2,1).

**6.4.4. Примеры билетов для экзамена**

ННГУ им. Н.И. Лобачевского Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики

## Дисциплина – Геометрия многообразий

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

Тензоры и алгебраические операции над ними.

Пусть отображение $f:U\left(1\right)\rightarrow U\left(1\right)$, определено формулой $f\left(z\right)=z^{4}$. Доказать, что оно дифференцируемо и регулярно.

# Зав. кафедрой Экзаменатор

ННГУ им. Н.И. Лобачевского Кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики

## Дисциплина – Геометрия многообразий

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

Параллельный перенос векторов вдоль кривой и его свойства.

Какие матрицы образуют касательное пространство к многообразию $U\left(n\right)$ в точке $E$, где $E$ – единичная матрица?

Зав. кафедрой Экзаменатор

**6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.**

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014.

<http://www.unn.ru/site/images/docs/obrazov-org/Formi_stroki_kontrolya_13.02.2014.pdf>

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

**7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

**а) основная литература:**

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.1. - М.: Наука. - 1981. - 344 с. (42 экз.)
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука. – 1979, 1986. - 759 с. (86 экз.)

**б) дополнительная литература:**

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука. – 1967. – 664 с.; М.: Изд-во УРСС. – 2003 - 759 с. (86 экз.)
2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Изд-во МГУ. – 1980. - 439 с. (101 экз.)

**в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

[http://www.unn.ru/e-library/](http://window.edu.ru/window_catalog/redir?id=72185)

http://www.unn.ru/books/resources.html

**8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного
типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных
консультаций, текущего контроля, промежуточной аттестации, а также
помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой
с возможностью подключения к сети «Интернет».

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций ОПОП ВО по направлению 01.03.01 «Математика».

Автор д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е.И. Яковлев

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Зав кафедрой, д.ф.м.н., проф. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ М.И. Кузнецов

Программа одобрена на заседании методической комиссии института Информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского от \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ г., протокол № \_\_\_\_\_\_\_\_.