

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

\_\_\_\_\_ Гергель В.П.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020

**Рабочая программа дисциплины  
Метод граничных интегральных уравнений**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования  
специалитет

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность  
01.05.01 Фундаментальная математика и механика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы  
Фундаментальная механика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижегород  
2020 год

## Лист актуализации

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_ \_\_\_\_ 2019 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2019-2020 учебном году на заседании кафедры

---

Протокол от \_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_ \_\_\_\_ 20\_\_ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2020-2021 учебном году на заседании кафедры

---

Протокол от \_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_ \_\_\_\_ 20\_\_ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2021-2022 учебном году на заседании кафедры

---

Протокол от \_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_ \_\_\_\_ 20\_\_ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2022-2023 учебном году на заседании кафедры

---

Протокол от \_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

## 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Метод граничных интегральных уравнений» Б1.О.30 относится обязательной части блока Б1 и обязательна для освоения в 9-м семестре студентами 5-го курса, обучающимися по направлению 01.05.01 - «Фундаментальные математика и механика»

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<i>ОПК-2 Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении</i>	<i>ОПК-2.1. Знает основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования</i>	<b>Знает</b> основные понятия, математические модели метода граничных интегральных уравнений, современные методы исследования в области решения задач .	<i>Собеседование</i>
	<i>ОПК-2.2. Умеет осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук.</i>	<b>Умеет</b> создавать и анализировать современные методы решения прикладных задач на основе знаний фундаментальных математических моделей	<i>Контрольная работа</i>
	<i>ОПК-2.3. Имеет практический опыт разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности</i>	<b>Владеет навыками</b> создания и применения базовых знаний и современного математического аппарата метода граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач.	<i>Контрольная работа</i>

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<i>ОПК-3 Способен самостоятельно создавать и грамотно использовать прикладные программные средства на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов</i>	<i>ОПК-3.1. Знает базовые понятия информатики, информации, ее измерения, кодирования и представления в вычислительных системах, принципы сбора, хранения и обработки информации, а также современные алгоритмы, средства разработки и программные средства</i>	<b>Знает</b> основные понятия, современное программное обеспечение и методы исследования в области решения задач методом граничных интегральных уравнений при решении прикладных задач	<i>Собеседование</i>
	<i>ОПК-3.2. Умеет использовать знания, полученные в области компьютерных наук</i>	<b>Умеет</b> создавать новые и модернизировать известные модели метода граничных интегральных уравнений, анализировать результаты с использованием современного программного обеспечения	<i>Контрольная работа</i>
	<i>ОПК-3.3. Имеет практический опыт использования информационных технологий, а также создания программных средств для решения задач профессиональной деятельности</i>	<b>Владеет навыками</b> применения базовых знаний и современного математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач методом граничных интегральных уравнений, в том числе в междисциплинарных областях.	<i>Контрольная работа</i>

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

<b>4.</b>	<b>очная форма</b>
-----------	--------------------

	<b>обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>4 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>144</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>16</b>
- занятия семинарского типа	<b>16</b>
- занятия лабораторного типа	
<b>самостоятельная работа</b>	<b>111</b>
<b>Контроль самостоятельной работы (КСР)</b>	<b>1</b>
<b>Промежуточная аттестация – зачет</b>	

#### 4.1. Содержание дисциплины

Очная форма обучения							
№	Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	в том числе				СР <sup>1</sup> , часы
			Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				
			из них				
ЗЛеГ <sup>2</sup>	ЗСеГ <sup>3</sup>	ЗЛаГ <sup>4</sup>	Всего				
1.	Состояние вопроса. Базовые математические модели.	12	2	2		4	8
2.	Матрицы фундаментальных и сингулярных решений.	26	3	3		6	20
3.	Формулы Грина. Метод потенциалов. Граничные интегральные уравнения.	31	4	4		8	23
4.	Гранично-элементная технология. Дискретные аналоги.	36	4	4		8	28
5.	Методы квадратур сверток, интегральных преобразований для ГИУ. Примеры.	38	3	3		6	32
6.	Контроль самостоятельной работы (КСР)	1					
7.	Промежуточная аттестация – зачет						
8.	Итого	144	16	16	0	32	111

<sup>1</sup> Самостоятельная работа обучающегося.  
<sup>2</sup> Занятия лекционного типа.  
<sup>3</sup> Занятия семинарского типа.  
<sup>4</sup> Занятия лабораторного типа.

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (зачет).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),

- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств включает: контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме *задач (практических заданий), контрольных работ* и контрольные материалы для проведения промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к *зачёту*.

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Шкала оценивания сформированности компетенций		Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
		Знания	Умения	Навыки
плохо	не зачтено	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа
		Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.
удовлетворительно	зачтено	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами
хорошо		Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.
очень хорошо		Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.
отлично		Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.
превосходно		Уровень знаний в	Продемонстрированы	Продемонстрирован

Шкала оценивания сформированности компетенций	Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)		
	Знания	Умения	Навыки
	объеме, превышающем программу подготовки.	все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов	творческий подход к решению нестандартных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
незачтено	неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы к зачету

№	Вопрос	Код формируемой компетенции
1.	Объемный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя.	ОПК-2
2.	Вывод интегральных уравнений для основных граничных задач теории гармонических функций.	ОПК-2
3.	Теоремы Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.	ОПК-2
4.	Интегральные операторы со слабой особенностью.	ОПК-2
5.	Разрешимость граничных интегральных уравнений для задач Дирихле и Неймана уравнения Лапласа.	ОПК-2
6.	Спектральные свойства граничных интегральных операторов.	ОПК-2
7.	Сингулярные интегральные уравнения. Примеры сингулярных интегральных уравнений.	ОПК-2

№	Вопрос	Код формируемой компетенции
8.	Граничные интегральные уравнения прямого подхода для уравнения Ламе.	ОПК-3
9.	Согласованная и изопараметрическая гранично-элементные схемы.	ОПК-3
10.	Переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Пространства основных и обобщенных функций.	ОПК-3
11.	Построение фундаментального решения для дифференциальных уравнений и переход к интегральным уравнениям.	ОПК-3
12.	Приближенные методы решения интегральных уравнений. Принцип сжатых отображений.	ОПК-3
13.	Нахождение собственных чисел и функций интегральных операторов по методу Келлога.	ОПК-3
14.	Нахождение собственных чисел и функций в случае вырожденных интегральных операторов.	ОПК-3
15.	Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Операторы с конечной абсолютной нормой. Совпадение этих двух классов интегральных операторов. Теоремы о разложении ядра интегрального оператора в ряд.	ОПК-3

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-2

*Пример задачи*

Рассмотрите алгоритм решения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), x \in [a, b]$$

с вырожденным ядром  $K(x, s) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x)\varphi_i(s)$ ,

где  $\psi_i(x), \varphi_i(s), i = 1, 2, \dots, n$  - системы линейно независимых функций.

### 5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-3

*Пример задачи*

Методом Галеркина найти два собственных значения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^1 k(x, s)y(s)ds = 0$$

$$k(x, s) = \begin{cases} s, & s \leq x, \\ x, & s > x. \end{cases}$$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

№	а) основная литература:	К-во
1.	Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничного элемента в трехмерных задачах математической физики: Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в	Э

№	а) основная литература:	К-во
	математике и механике. Н.Новгород: Нижегородский университет. 2007. 100 с. <a href="http://www.unn.ru/pages/issues/aids/2007/45.pdf">http://www.unn.ru/pages/issues/aids/2007/45.pdf</a>	
2.	Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с. <a href="http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf">http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_LaplaceTransform.pdf</a>	Э
3.	Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 43 с. <a href="http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf">http://www.mmf.unn.ru/files/2014/01/Igumnov_BoundaryIntegralEquations.pdf</a>	Э
4.	Игумнов Л.А., Марков И.П. Применение метода ГИУ для решения краевых динамических упругопластических задач в трехмерной постановке: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 21 с. <a href="http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf">http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/124.pdf</a>	Э
5.	Игумнов Л.А., Пазин В.П. Построение матриц Грина и Неймана в трехмерной статической теории упругости с сопряженными полями: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 22 с. <a href="http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf">http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/125.pdf</a>	Э
6.	Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 23 с. <a href="http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf">http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/126.pdf</a>	Э
7.	Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Фундаментальные и сингулярные решения изотропной теории упругости и вязкоупругости: Электронное методическое пособие. Н.Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2011. 18 с. <a href="http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf">http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/127.pdf</a>	Э

№	б) дополнительная литература:	К-во
1.	Бенерджи П., Баттерфильд Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. - 494с.	-
2.	Бреббия к., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. - 524с	3
3.	Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. - М.: Мир, 1982. - 284с	-
4.	Бурчуладзе В.Д., Гегелия Т.Г. Развитие метода потенциала в теории упругости. - Тбилиси: Мецниереба. - 228с.	-
5.	Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., Наука, 1976.	-
6.	Партон В.В., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977.	3
7.	Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошной среды. - М.: Наука, 1987. - 320с.	-
8.	Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике	28

№	б) дополнительная литература:	К-во
	деформируемого твердого тела. - Казань: КГУ. 1986. - 296с.	
9.	Bonnet H. Boundary integral equation methods for solids and fluids. Wiley, 1995.- 391 p.	-
10.	Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.:Янус, 2001.-508 с.	-
11.	Aliabadi M.H. The Boundary element method. Vol. 2. Wiley. 2002.-580 p	-
12.	Mukherjee S., Mukherjee Y.X. Boundary methods.- Taylor, 2005.-220 p.	-
13.	Игумнов Л.А., Баженов В.Г. Метод граничных элементов в трехмерной динамической теории упругости и вязкоупругости с сопряженными полями: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2007. 328 с.	20
14.	Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учебное пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 2009. 180 с.	20
15.	Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций и его приложения: Учебно-методическое пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. 55 с.	20
16.	Верюжский Ю.В. Метод потенциала в статических задачах строительной механики. - М.: Наука, 1981.	20
17.	Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к задачам математической физики. - М. - Л.: Гостехиздат, 1953 <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm</a>	Э
18.	Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. - М.: Физматгиз, 1963.	-
19.	Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962.	-
20.	Сб.: Метод граничных интегральных уравнений. - М.: Мир, 1978. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто Н.В. Интегральные уравнения в теории упругости. - Спб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та. 1994. 272с	-

№	в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы (в соответствии с содержанием дисциплины)	«Л» или «С» <sup>1</sup>
1.	<a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm</a>	С
2.	<a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm</a>	С

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

<sup>1</sup> Указывается буква «Л», если программное обеспечение – лицензионное, или «С» – в свободном доступе.

Автор(ы) \_\_\_\_\_ д.ф.-м.н., профессор  
Игумнов Л.А.

Рецензент(ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой  
теоретической,  
компьютерной и  
экспериментальной  
механики \_\_\_\_\_ д.ф.-м.н., профессор  
Игумнов Л.А.