

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

---

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «16» июня 2021 г. № 8

**Рабочая программа дисциплины**

Теория групп

---

Уровень высшего образования  
специалитет

---

Направление подготовки / специальность  
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

---

Направленность образовательной программы  
Фундаментальная механика и приложения

---

Форма обучения  
очная

---

Нижний Новгород

2021 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
2	Блок 1. Дисциплины (модули) Часть, формируемая участниками образовательных отношений	Дисциплина Б1.В.ДВ.01.02, «Теория групп» относится к части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, формируемой участниками образовательных отношений.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
<b>ПК-2.</b> Способен самостоятельно анализировать поставленную задачу, выбирать корректные методы её решения, применять математически сложные алгоритмы в современных специализированных программных комплексах, реализовывать в них новые алгоритмы	<b>ПК-2.1.</b> Знает теоретические основы и методологию построения решений фундаментальных задач математики и механики, основы информационных технологий. <b>ПК-2.2.</b> Умеет осуществлять анализ и выбор методов и алгоритмов решения задач профессиональной деятельности. <b>ПК-2.3.</b> Владеет навыками решения задач математики и механики в соответствии с выбранным методом и построенным алгоритмом с использованием современных программных комплексов.	<i>Знать основные подходы и методы построения решений задач групповой структуры. Уметь анализировать и владеть основными алгоритмами теории групп для решения поставленных задач. Обладает практическим опытом компьютерными методами теории групп .</i>	Собеседование Разноуровневые задачи и задания Контрольная работа

## 3. Структура и содержание дисциплины

### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
<b>Общая трудоемкость</b>	<b><u>3</u> ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>108</b>
<b>в том числе</b>	
<b>аудиторные занятия (контактная работа):</b>	
- занятия лекционного типа	<b>32</b>
- занятия семинарского типа	<b>32</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>43</b>
<b>текущий контроль (КСР)</b>	<b>1</b>

Промежуточная аттестация – зачет	
----------------------------------	--

### 3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы. Из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
<b>Группы.</b> Определение группы, подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Гомоморфизмы групп. Ядро, образ гомоморфизма. Смежные классы по подгруппе. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах групп.	20	6	6		12	7
<b>Действие группы на множестве.</b> Орбиты, стабилизаторы. Формула длины орбиты. Формула разложения на орбиты. Классы сопряженных элементов, формула классов. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Центр группы.	18	6	6		12	8
<b>р-группы, разрешимые и простые группы.</b> р-группы. Теоремы Силова. Группы порядка $p^q$ . Коммутант группы. Разрешимые и простые группы.	20	6	6		12	6
<b>Задание группы образующими и соотношениями.</b> Внешнее, внутреннее прямое произведение групп. Разложимые группы. Разложимость конечной циклической группы. Свободные группы. Универсальное свойство свободной группы. Задание группы образующими и соотношениями.	21	6	6		12	10
<b>Конечные и конечнопорожденные абелевы группы.</b> Конечные абелевы группы. Примарные группы. Элементарные делители примарной группы. Число неизоморфных примарных групп порядка $p^n$ . Коэффициенты кручения конечной абелевой группы. Конечнопорожденные абелевы группы. Свободные абелевы группы. Ранг свободной абелевой группы. Подгруппа кручения. Коэффициенты кручения конечнопорожденной абелевой группы.	28	8	8		16	12
Текущий контроль (КСР)	1					

Промежуточная аттестация зачет						
Итого	108	32	32		64	43

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в форме зачета.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Выполнение домашних практических заданий с последующей проверкой и обсуждением.

Изучение литературы и проработка теоретического материала лекционных занятий.

Образовательный материал для самостоятельной работы студента:

1. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Хорева Н.А., Чебочко Н.Г. "ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП. ЧАСТЬ I.". Практикум. 2010, ФЭОР. – URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/teor\\_gr.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/teor_gr.pdf)
2. Кузнецов М.И., Муляр О.А., Чебочко Н.Г. Задачи по теории групп. Ч. II. Практикум. 2015. ФЭОР. – URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/mulyar.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/mulyar.pdf)
3. Кузнецов М.И. "ЗАДАНИЕ ГРУПП ОБРАЗУЮЩИМИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ". Учебно-методическое пособие. 2014 ФЭОР. – URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/generators.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/generators.pdf).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

##### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие	При решении	Продемонстри	Продемонстри	Продемонстри	Продемонстри	Продемонстри

	минимальны х умений . Невозможно сть оценить наличие умений вследствие отказа обучающего я от ответа	стандартных задач не продемонстр ированы основные умения.  Имели место грубые ошибки.	ированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме.	рованы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	рованы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	ированы все основные умения, реше ны все основные задачи с отдельными несуществен ным недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	ированы все основные умения, . Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном  объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможно сть оценить наличие навыков вследствие отказа обучающего я от ответа	При решении стандартных задач не продемонстр ированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется минимальны й набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстри рованы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстри рованы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.	Продемонстр ированы навыки при решении нестандартн ых задач без ошибок и недочетов.	Продемонстр ирован творческий подход к решению нестандартн ых задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»

не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения.

### 5.2.1 Контрольные вопросы

вопросы	Код формируемой компетенции
1. Бинарная алгебраическая операция. Примеры. Теорема об обобщенной ассоциативности.	ПК-2
2. Определение группы, подгруппы. Эквивалентное определение подгруппы. Примеры.	ПК-2
3. Степени, свойства степеней. Порядок элемента. Свойства порядка.	ПК-2
4. Циклические группы. Теорема о порядке элемента и циклической подгруппы порожденной этим элементом. Следствия.	ПК-2
5. Теорема об изоморфизме циклических групп.	ПК-2
6. Теорема о подгруппах циклической группы.	ПК-2
7. Гомоморфизмы групп. Примеры. Свойства гомоморфизмов групп. Ядро, образ гомоморфизма. Изоморфизм групп.	ПК-2
8. Смежные классы по подгруппе (левые, правые). Примеры.	ПК-2
9. Индекс группы по подгруппе. Теорема Лагранжа, следствия.	ПК-2
10. Нормальные подгруппы. Факторгруппа. Каноническая проекция. Примеры.	ПК-2
11. Основная теорема о гомоморфизме. Следствие.	ПК-2
12. 1-ая теорема об изоморфизме.	ПК-2
13. Теорема о соответствии. Следствия.	ПК-2
14. Действие групп на множестве. Примеры. Эквивалентность определений действия групп на множестве.	ПК-2
15. Орбиты, стабилизаторы. Примеры. Сопряженность стабилизаторов элементов из одной орбиты.	ПК-2
16. Предложение о соответствии между элементами орбиты и множеством левых смежных классов по подгруппе. Формула длины орбиты.	ПК-2
17. Формула разложения на орбиты. Формула классов.	ПК-2

18. Действие сопряжениями и левыми сдвигами. Теорема Кэли.	ПК-2
19. Центр группы. Примеры. Свойства. Теорема о центре р-группы.	ПК-2
20. Порядки элементов в абелевой группе. Лемма о показателе.	ПК-2
21. Теорема Коши. Силовские подгруппы. Теоремы Силова. Следствие.	ПК-2
22. Свойства коммутанта. Примеры.	ПК-2
23. Разрешимые группы. Примеры. Свойства разрешимых групп.	ПК-2
24. Теорема о разрешимости р-группы. Группа порядка $p^2$ .	ПК-2
25. Внешнее, внутреннее прямое произведение. Теорема об эквивалентности определений внутреннего произведения групп.	ПК-2
26. Теорема о порядке произведения.	ПК-2
27. Следствие теоремы о порядке произведения. Теорема о разложимости циклической группы.	ПК-2
28. Теорема о разложении группы в прямую сумму силовских нормальных подгрупп.	ПК-2
29. Теорема о факторгруппе произведения.	ПК-2
30. Абелевы группы. Примарная подгруппа. Теорема о разложении в прямую сумму примарных подгрупп.	ПК-2
31. Лемма о представителе. Теорема о разложении примарной группы.	ПК-2
32. Теорема о единственности разложения примарной группы.	ПК-2
33. Элементарные делители примарной группы. Теорема об изоморфизме примарных групп. Число неизоморфных примарных групп порядка $p^n$ .	ПК-2
34. Коэффициенты кручения. Основная теорема о конечных абелевых группах.	ПК-2

### 5.2.2 Типовые задания для оценки сформированности компетенции ПК-2

1. В циклической группе порядка 20 найти все элементы  $a$ , такие что  $a^4 = e$  и все элементы порядка 4.

2. Найти классы сопряженных элементов в группе  $A_4$ .

3. Выяснить какие из перечисленных циклических групп  $\langle a \rangle$ , порожденных элементом  $a \in G$ , изоморфны:

$$1) G = \mathbb{Q}^*, a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i;$$

2)  $G = \mathbb{C}^*$ ,  $a = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$ ;

3)  $G = \mathbb{C}^*$ ,  $a = -3\pi$ ;

4)  $G = \mathbb{C}^*$ ,  $a = 7 - i$ ;

5)  $G = S_6$ ,  $a = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)$ ;

6)  $G = \mathbb{Z}$ ,  $a = -310$ ;

7)  $G = GL_n(\mathbb{C})$ ,  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

4. Найти все силовские 3-подгруппы в  $S_4$ .

5. Найти порядок элемента  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$ .

6. Определить является отображение  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  гомоморфизмом групп или нет, найти ядро и образ:

a)  $f(z) = |\bar{z}|^2$ ;

в)  $f(z) = -|z|$ ;

с)  $f(z) = 1$ ;

d)  $f(z) = 3$ .

7. Доказать изоморфизм  $\mathbb{C}^* / \mathbb{C}^+ \cong T^1$ .

8. Найти централизатор подстановки  $(1\ 4\ 2)$  в  $S_4$ .

9. Выяснить является множество с операцией группой или нет.

10. В группе  $GL_2(\mathbb{R})$  найти централизатор матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

11. Найти все гомоморфные отображения  $Z_9 \rightarrow Z_{36}$ .

12. Доказать, что группа  $G = \langle a, b \mid a^8, b^2 a^2, b^{-1} a b a \rangle$  конечна.

13. Доказать, что группу  $S_3$  можно задать следующими образующими и соотношениями:

$\langle a, b \mid a^2, b^3, a^{-1} b a b^{-2} \rangle$ .

14. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.

15. Найти левые и правые смежные классы в  $S_3$  по подгруппе  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

16. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.

17. Изоморфны ли группы:  $Z_{12} \oplus Z_{36}$  и  $Z_{18} \oplus Z_{24}$ ?

18. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.



19. Доказать, что не существует простых групп порядка 80.
20. Найти количество элементов заданного порядка в заданной группе.
21. Найти все орбиты и стабилизаторы группы  $G$ , порожденной подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

и действующей на множестве  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

22. Найти все подгруппы циклической группы порядка 36.
23. Найти нормальные подгруппы в  $S_4$ .
24. Найти порядок элемента  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$ .
25. Доказать изоморфизм  $GL_n(\mathbb{C})/SL_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$ .

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) Основная литература:

1. Кострикин А. И. - Введение в алгебру. М.: Физматлит, 2004. (В библиотеке ННГУ более 50 экз.)
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2003. (В библиотеке ННГУ более 100 экз.)

### б) Дополнительная литература:

1. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2004. (В библиотеке ННГУ более 30 экз.)
2. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. - Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. специальностям. 2001, 2007, 2008 (В библиотеке ННГУ более 100 экз.)

### в) Интернет-ресурсы

<http://www.lib.unn.ru/>

Университетская библиотека ONLINE <http://www.biblioclub.ru>

Библиотека "Лань" <http://e.lanbook.com/>

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 2 июня 2021 года, протокол № 8.

Автор (ы): к.ф.-м.н., доц. \_\_\_\_\_Любимцев О.В.

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой: д.ф.м.н., проф \_\_\_\_\_Кузнецов М.И.