

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

Радиофизический факультет  
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

Декан

Матросов В.В.

« 29 » июня 2020 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Б1.Б.11 Теория функций комплексного  
переменного

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования  
специалитет

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Системы подвижной цифровой защищенной связи

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Квалификация (степень)

специалист

(бакалавр / магистр / специалист)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2018

## 1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к базовой части Блока Б1 «Дисциплины (модули)» ОПОП по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем» с направленностью программы «Системы подвижной цифровой защищенной связи». Дисциплина обязательна для освоения в 3 семестре.

Студенты к моменту освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного», согласно ФГОС ВО, ознакомлены с основными теоретическими понятиями и прикладными знаниями, полученными в рамках изучения дисциплин «Математический анализ», «Алгебра и геометрия».

К моменту изучения дисциплины у студентов присутствуют устойчивые представления, касающиеся математического анализа, студенты владеют основами аналитической геометрии и линейной алгебры.

**Целями освоения дисциплины являются:**

- знать элементы теории аналитических функций, конформных отображений и вычетов;
- уметь применять методы теории функций комплексного переменного к решению прикладных задач;
- освоить технику расчета несобственных и контурных интегралов с помощью вычетов;
- иметь представление о комплексных числах и функциях комплексного переменного.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (код компетенции, уровень освоения – при наличии в карте компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций
<i>ОПК-2:</i>  способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач.  Уровень освоения – начальный.	<i>З1 (ОПК-2):</i> Знать и понимать современный математический аппарат, методы его совершенствования. <i>У1 (ОПК-2):</i> Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач. <i>В1 (ОПК-2):</i> Владеть опытом применения соответствующего математического аппарата для решения профессиональных задач.

Окончательное завершение формирования компетенций, предусмотренных в рамках данной дисциплины, происходит после сдачи экзамена по этой дисциплине.

### 3. Структура и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 4 зачетные единицы, всего 144 часа, из которых 66 часов составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (32 часа занятия лекционного типа, 32 часа занятия семинарского типа, в том числе 2 часа – мероприятия текущего контроля успеваемости, 2 часа – мероприятия промежуточной аттестации), 78 часов составляет самостоятельная работа обучающегося.

#### Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе				
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
Тема 1 Функции комплексного переменного, предел и производная	33	7	8		15	18
Тема 2 Элементы теории конформных отображений	9	3			3	6
Тема 3 Интегрирование функции комплексного переменного	19	7	4		11	8
Тема 4 Ряды аналитических функций	44	10	10		20	24
Тема 5 Теория вычетов и ее приложения	37	5	10		15	22
В т.ч.текущий контроль	2		2		2	
Промежуточная аттестация: экзамен						

### 4. Образовательные технологии

В соответствии с рабочей программой и тематическим планом изучение дисциплины проходит в виде аудиторной и самостоятельной работы студентов. Учебный процесс в аудитории осуществляется в форме практических занятий.

#### **Образовательные технологии, способствующие формированию компетенций**

*используемые на занятиях лекционного типа:*

- лекции с проблемным изложением учебного материала;
- лекции с детальным объяснением нового материала и его связи с уже пройденным материалом;

**используемые на занятиях практического типа:**

- регламентированная самостоятельная деятельность студентов;
- частично-поисковая деятельность при решении задач повышенной сложности,
- текущий контроль знаний студентов с помощью контрольной работы.

**На лекциях** раскрываются следующие основные темы изучаемого курса, которые входят в рабочую программу: понятие функции комплексного переменного, непрерывность, дифференцирование функции комплексного переменного, условия Коши-Римана в декартовых и полярных координатах, свойства аналитических функций, геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного, определение и общие свойства конформного отображения, отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями, основные принципы конформного отображения, основная задача теории конформных отображений, теорема Римана, круговое свойство отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией, определение и основные свойства интеграла от функции комплексного переменного, теорема Коши для односвязной и многосвязной областей, первообразная аналитической функции, неопределенный интеграл, формула Коши, интеграл Коши, аналитическая зависимость интеграла от параметра, существование производных всех порядков у аналитической функции, теоремы Морера и Лиувилля, основная теорема высшей алгебры, равномерная сходимость рядов функций комплексного переменного, свойства равномерно сходящихся рядов, теоремы Вейерштрасса, степенные ряды, ряд Тейлора, единственность определения аналитической функции, аналитическое продолжение, понятие полной аналитической функции, ряд Лорана, классификация изолированных особых точек однозначных функций, определение вычета функции относительно конечной изолированной особой точки и бесконечно удаленной точки, формулы вычисления вычетов в простом полюсе и в полюсе порядка  $m$ , основная теорема о вычетах, теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости, вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов, вычисление главных значений по Коши несобственных интегралов с помощью вычетов, лемма Жордана, вычисление главных значений несобственных интегралов, содержащих тригонометрические функции, с помощью вычетов, логарифмический вычет, теорема о подсчете числа нулей функции комплексного переменного

**На практических занятиях** более подробно изучается программный материал в плоскости отработки практических умений и навыков и усвоения следующих тем:

1. Формы представления комплексного числа. Простейшие действия над комплексными числами.
2. Элементарные функции комплексного переменного.
3. Логарифмическая и обратные тригонометрические функции комплексного переменного. Решение уравнений.
4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
5. Интегральная теорема Коши. Первообразная аналитической функции. Интегральная формула Коши.
6. Контрольная работа по теме «Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного».
7. Степенные ряды.
8. Ряд Тейлора.
9. Ряд Лорана, отыскание его области сходимости.
10. Основные приемы разложения функций в ряд Лорана.
11. Классификация особых точек однозначных функций.
12. Вычисление вычетов.
13. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.

14. Вычисление тригонометрических интегралов с помощью вычетов.
15. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.
16. Вычисление главных значений несобственных интегралов с помощью вычетов и леммы Жордана.

Формой **итогового контроля** знаний студентов по дисциплине является **экзамен**, в ходе которого оценивается уровень теоретических знаний и навыки решения практических задач.

## 5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

**Самостоятельная работа** студентов направлена на выполнение домашних заданий по темам практических занятий, подготовку к контрольной работе по теме «Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного», а также подготовку к экзамену по указанной дисциплине. При подготовке к практическому занятию необходимо помнить, что данная дисциплина тесно связана с ранее изучаемыми дисциплинами «Математический анализ», «Алгебра и геометрия».

**Цель самостоятельной работы** - подготовка современного компетентного специалиста и формирование способностей и навыков к непрерывному самообразованию и профессиональному совершенствованию.

**На семинарских занятиях** студент должен уметь последовательно излагать свои мысли и аргументировано их отстаивать.

Для достижения этой цели необходимо:

- 1) ознакомиться с соответствующей темой программы изучаемой дисциплины;
- 2) осмыслить круг изучаемых вопросов и логику их рассмотрения;
- 3) изучить рекомендованную учебно-методическим комплексом литературу по данной теме;
- 4) тщательно изучить лекционный материал.

## 6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

- 6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

**ОПК-2:** способность применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач (начальный уровень).

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»
<b>Знания</b> Знать и понимать современный математический	Отсутствие знаний теоретического материала	Уровень знаний теоретического материала	Минимально допустимый уровень знаний.	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, соответствующем	Уровень знаний в объеме, превышающем

еский аппарат, методы его совершенствования.	Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	а ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки	Допущено много негрубых ошибок.	программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок .	программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок	программе подготовки, без ошибок .	программе подготовки
<u>Умения</u> <i>Уметь</i> применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач.	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки..	Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме..	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов.
<u>Навыки</u> <i>Владеть</i> опытом применения соответствующего математического аппарата для решения профессиональных задач.	Отсутствие опыта владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки .	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов .	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов .	Продемонстрированы творческий подход к решению нестандартных задач
Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных	0 – 20 %	20 – 50 %	50 – 70 %	70-80 %	80 – 90 %	90 – 99 %	100%

заданий							
---------	--	--	--	--	--	--	--

## 6.2. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Итоговый контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде экзамена, на котором определяется:

- уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине;
- уровень понимания студентами изученного материала;
- способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач.

Экзамен проводится в устной форме и заключается в ответе студента, после предварительной подготовки, на теоретические вопросы по курсу и представлении решения практических задач с последующим их обоснованием.

<b>Превосходно</b>	Превосходная подготовка с очень незначительными погрешностями
<b>Отлично</b>	Подготовка с некоторыми ошибками, уровень которой существенно выше среднего
<b>Очень хорошо</b>	В целом хорошая подготовка с рядом заметных ошибок, принципиально не искажающих суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
<b>Хорошо</b>	Хорошая подготовка с заметными ошибками, частично искажающими суть излагаемой на экзамене задачи (проблемы)
<b>Удовлетворительно</b>	Подготовка, удовлетворяющая минимальным требованиям
<b>Не удовлетворительно</b>	Необходима дополнительная подготовка для успешного прохождения испытания
<b>Плохо</b>	Подготовка, совершенно недостаточная для понимания сути задачи (проблемы)

## 6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих сформированность компетенций

**Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:**

- устные и письменные опросы.

**Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:**

- практические контрольные задания, включающих одну или несколько задач (вопросов).

**Для проведения итогового контроля сформированности компетенции используются:**

- письменные и устные ответы на теоретические вопросы,
- решение практических задач.

- 6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих сформированность компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

**Список вопросов по теории к экзамену (для оценки сформированности знаний компетенции ОПК-2)**

1. Предел последовательности комплексных чисел. Необходимое и достаточное условие сходимости.
2. Теорема об ограниченной последовательности. Критерий Коши.
3. Введение бесконечно удаленной точки (комплексного числа  $z=\infty$ ). Сфера Римана.
4. Определение функции комплексного переменного, ее геометрический смысл. Многозначность и однолиственность отображения.
5. Определение предела функции комплексного переменного по Коши и по Гейне. Непрерывность и ее геометрический смысл.
6. Примеры отображений, осуществляемых простейшими непрерывными функциями (линейная, квадратичная, отображение инверсии).
7. Определение производной функции комплексного переменного. Необходимое условие дифференцируемости функции комплексного переменного (условия Коши-Римана). Формула нахождения производной.
8. Достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие аналитической функции.
9. Условия Коши-Римана в полярных координатах. Формула вычисления производной. Пример: степенная функция.
10. Условия Коши-Римана для модуля и аргумента функции. Формула вычисления производной. Пример: показательная функция.
11. Простейшие свойства аналитических функций.
12. Свойства действительной и мнимой частей аналитической функции.
13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Свойства сохранения углов и постоянства растяжения.
14. Определение конформного отображения. Основная задача теории конформных отображений. Функции, осуществляющие конформные отображения.
15. Конформные отображения, осуществляемые линейной и степенной функциями. Поверхность Римана.
16. Конформное отображение, осуществляемое показательной функцией. Пример: отображение бесконечной вертикальной полосы на верхнюю полуплоскость.
17. Основные принципы конформного отображения.
18. Теорема Римана. Невозможность конформного отображения многосвязной области на односвязную. Условия единственности отображения.
19. Основные свойства конформного отображения, осуществляемого дробно-линейной функцией.
20. Отображение верхней полуплоскости на единичный круг с помощью дробно-линейной функции.
21. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его вычисление.
22. Свойства интеграла от функции комплексного переменного.
23. Теорема Коши для односвязной области.
24. Обобщение теоремы Коши на случай многосвязной области.
25. Теорема о первообразной аналитической функции в односвязной области.
26. Введение неопределенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
27. Вывод формулы Коши. Следствия: формула среднего значения.
28. Принцип максимума модуля аналитической функции.



29. Аналитическая зависимость интеграла от параметра.
30. Существование производных всех порядков у аналитической функции.
31. Теоремы Морера и Лиувилля. Основная теорема алгебры.
32. Равномерная сходимость рядов функций комплексного переменного. Достаточный признак Вейерштрасса. Критерий Коши.
33. Первая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
34. Свойства равномерно сходящихся рядов. Вторая теорема Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
35. Теорема Абеля об области абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда.
36. Следствия теоремы Абеля. Круг и радиус сходимости степенного ряда.
37. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
38. Теорема Тейлора.
39. Нули аналитической функции. Целая функция. Единственность определения аналитической функции.
40. Определение аналитического продолжения. Аналитическое продолжение в комплексную плоскость элементарных функций действительного переменного и соотношений между ними.
41. Аналитическое продолжение с помощью степенных рядов. Понятие полной аналитической функции.
42. Определение ряда Лорана. Область его сходимости. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Лорана.
43. Правильные и особые точки. Классификация изолированных особых точек. Ограниченность функции в окрестности устранимой особой точки.
44. Поведение функции в окрестности полюса.
45. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
46. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, классификация изолированной особой точки  $z=\infty$ .
47. Определение вычета. Вычисление вычетов.
48. Основная теорема теории вычетов. Теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости.
49. Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции, с помощью вычетов.
50. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  с помощью вычетов.
51. Лемма Жордана. Вычисление главных значений несобственных интегралов вида  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)e^{imx}dx$  с помощью вычетов.
52. Логарифмический вычет. Вычисление вычетов логарифмической производной функции.
53. Теорема о числе нулей и полюсов, ее геометрический смысл.

**Примеры практических заданий для экзамена (для оценки сформированности умений и навыков компетенции ОПК-2)**

1. Определить радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ .
2. Разложить в ряд Лорана функцию  $\frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)}$  в окрестности точки  $z = 2$ .

3. Вычислить тригонометрический интеграл  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 + \sin^2 x} \quad (a \in \mathbb{C})$ .
4. Вычислить несобственный интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)^2} dx$ .
5. Определить радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ .
6. Разложить в ряд Лорана функцию  $z^2 e^{1/z}$  в окрестности точки  $z = \infty$ .
7. Вычислить контурный интеграл  $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z-2i} dz$ .
8. Вычислить несобственный интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$ .

#### 6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. № 55-ОД,

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 г. № 247-ОД.

### 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

#### а) основная литература:

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2010. – 612 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 528 с.
3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматлит, 2006. – 247 с.

#### б) дополнительная литература:

1. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
2. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976. – 407 с.
3. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 447 с.
4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

#### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы.

<http://www.lib.unn.ru/php/showsel.php?DB=1>).  
<http://www.lib.unn.ru/php/searchext.php?Type=2&Action=1>).  
<http://www.lib.unn.ru/php/searchext.php?Type=2&Action=1>).  
<http://www.lib.unn.ru/php/searchext.php?Type=2&Action=1>).

<http://www.lib.unn.ru/php/searchext.php?Type=2&Action=1>).  
<http://www.lib.unn.ru/php/searchext.php?Type=2&Action=1>).  
<http://www.lib.unn.ru/php/searchext.php?Type=2&Action=1>).

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Для обучения студентов названной дисциплине имеются в наличии: специальные кабинеты, оборудованные мультимедийными средствами обучения; компьютерные классы, где имеется возможность выхода в Интернет; присутствует полный комплект лицензионного обеспечения, необходимый для работы компьютерных программ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВПО по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем».

Автор (ы) \_\_\_\_\_ Дубков А.А.

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_ Демин И.Ю.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ Дубков А.А.

Программа одобрена на заседании методической комиссии радиофизического факультета от «25» июня 2020 года, протокол № 03/20.