МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет**

**им. Н.И. Лобачевского»**

|  |
| --- |
| Институт информационных технологий, математики и механики |

(факультет / институт / филиал)

|  |
| --- |
|  |
| УТВЕРЖДЕНО решением президиума Ученого совета ННГУ протокол от «11» мая 2021 г. № 2\_\_\_ |

**Рабочая программа дисциплины**

|  |
| --- |
| **Функциональный анализ и вариационное исчисление** |

*(наименование дисциплины (модуля))*

Уровень высшего образования

|  |
| --- |
| бакалавриат |

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

|  |
| --- |
| **010303 Механика и математическое моделирование** |

*(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)*

Направленность образовательной программы

|  |
| --- |
| **Математическое моделирование и компьютерный инжиниринг** |

*(указывается профиль / магистерская программа / специализация)*

Форма обучения

|  |
| --- |
| очная |

*(очная / очно-заочная / заочная)*

Нижний Новгород

2021 год

1. **Место дисциплины в структуре ООП**

Дисциплина «Функциональный анализ» относится к обязательной части.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ варианта** | **Место дисциплины в учебном плане образовательной программы** | **Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД** |
| 1 | Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть | Дисциплина Б1.О.23, Функциональный анализ и вариационное исчисление относится к обязательной части ООП направления 01.03.03 Механика и математическое моделирование |

1. **Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Формируемые компетенции** (код, содержание компетенции) | **Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции** | | **Наименование оценочного средства** |
| **Индикатор достижения компетенции**\*  (код, содержание индикатора) | **Результаты обучения**  **по дисциплине\*\*** |
| *ОПК-1*  *Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности* | ***ОПК-1.1****.:* ***Знает*** *основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук* | *Знать классические постановки задач бесконечномерной оптимизации, , а также аналитические методы решения задач бесконечномерной оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности и соответствующих элементов функционального анализа* | *собеседование* |
| ***ОПК-1.2****.:* ***Умеет*** *анализировать и решать стандартные профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук* | *Уметь самостоятельно и корректно использовать методы формализации практических и естественнонаучных задач в виде задач бесконечномерной оптимизации, допускающих такую формализацию, а также применять для их решения и исследования методы функционального анализа и бесконечномерной оптимизации* | *задачи* |
| ***ОПК-1.3****.:* ***Владеет навыками*** *применения фундаментальных разделов механики, базовых знаний естественнонаучного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач* | *Владеет навыками использования методов формализации прикладных и естественнонаучных задач, возникающих из потребностей научно-исследовательской деятельности, в виде задач бесконечномерной оптимизации, при условии, что они допускают такую формализацию, а также применения для их решения и исследования методов функционального анализа и бесконечномерной оптимизации* | *задачи* |
| *ОПК-2*  *Способен применять методы математического и алгоритмического моделирования, современный математический аппарат в научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности* | ***ОПК-2.1****.:* ***Знает*** *основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования* | *Знать основные положения, терминологию и методологию в области функционального анализа и вариационного исчисления* | *собеседование* |
| ***ОПК-2.2****.:* ***Умеет*** *осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук* | *Уметь осуществлять анализ и выбор методов решения задач, допускающих формализацию в виде задач вариационного исчисления* | *задачи* |
| ***ОПК-2.3****.:* ***Владеет навыками*** *применения базовых знаний в области математического и алгоритмического моделирования, а также современный математический аппарат при решении задач профессиональной деятельности* | *Владеть навыками применения базовых знаний в области вариационного исчисления, а также современный математический аппарат функционального анализа при решении задач математического моделирования* | *задачи* |

1. **Структура и содержание дисциплины**

**3.1. Трудоемкость дисциплины**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **очная форма**  **обучения** |
| **Общая трудоемкость** | **4 ЗЕ** |
| **Часов по учебному плану** | **144** |
| **в том числе** |  |
| **контактная работа:**  **- занятия лекционного типа**  **- занятия семинарского типа**  **- текущий контроль (КСР)** | **65**  **32**  **32**  **1** |
| **самостоятельная работа** | **79** |
| **Промежуточная аттестация – зачет** |  |

**3.2. Содержание дисциплины**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины** | **Всего**  **(часы)** | в том числе | | | | |
| **контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | **Самостоятельная**  **работа обучающегося, часы** |
| **Занятия лекционного типа** | **Занятия семинарского типа** | **Занятия лабораторного**  **типа** | **Всего**  **контактных часов** |
| **Шестой семестр** | | | | | | |
| Тема 1.  Измеримые множества.  Определение и основные свойства измеримых множеств. | 10 | 2 | 2 |  | 4 | 6 |
| Тема 2.  Измеримые функции.  Определение и основные свойства измеримых функций. Понятие эквивалентности функций и сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Структура измеримых функций. Интеграл Лебега. Теорема Фубини. Понятие абсолютно непрерывной функции. | 16 | 5 | 5 |  | 10 | 6 |
| Тема 3.  Линейные пространства и операторы. Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства. Линейные ограниченные операторы. Операции над линейными операторами. Понятие сопряженного оператора. Понятие спектра и спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. Приложение спектральной теории к решению линейных дифференциальных уравнений. Принцип сжимающих отображений. Билинейные операторы. | 16 | 5 | 5 |  | 10 | 6 |
| Тема 4.  Нелинейные операторы. Ограниченность и непрерывность нелинейного оператора. Производная по направлению и вариация по Лагранжу. Дифференцируемость по Гато и по Фреше. Квадратичный функционал. Вторая вариация и дважды дифференцируемость по Фреше. Необходимые и достаточные условия локального минимума нелинейного функционала. | 16 | 5 | 5 |  | 10 | 6 |
| Тема 5.  Простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения. Условия первого порядка.  Простейшая задача: классификация экстремумов, варьирование, необходимые условия первого порядка (стационарность, уравнение Эйлера), конкретные примеры (задачи о брахистохроне и о наименьшей поверхности вращения). Принцип Гамильтона-Остроградского и его применения. Обобщения простейшей задачи: экстремальные задачи на линейных многообразиях в линейных нормированных пространствах, задачи со старшими производными, задачи с вектор-функциями, задачи с функциями нескольких переменных, задачи с подвижными границами, задачи на классе кусочно-гладких функций, | 16 | 5 | 5 |  | 10 | 6 |
| Тема 6.  Условия второго порядка в вариационном исчислении.  Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления: необходимые условия Лежандра и Якоби слабого минимума, необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, достаточные условия локального минимума. | 16 | 5 | 5 |  | 10 | 6 |
| Тема 7.  Принцип Лагранжа в вариационном исчислении. Вариационные задачи с ограничениями.  Изопериметрические задачи. Задачи со связями. Задача Лагранжа. Конкретные примеры: задача Дидоны, задача о цепной линии, задача Чаплыгина о самолете. | 16 | 5 | 5 |  | 10 | 6 |
| **Текущий контроль (КСР)** | 2 |  |  |  | 2 |  |
| **Промежуточная аттестация - экзамен** | 36 |  |  |  |  |  |
| **Итого** | 144 | 32 | 32 |  | 66 | 42 |

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет, экзамен).

1. **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Функциональный анализ и вариационное исчисление» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к зачету и экзамену. Самостоятельная работа студентов (выполнение домашних практических заданий, подготовка к коллоквиуму, экзамену и зачету) обеспечивается доступной студентам основной и дополнительной литературой, а также доступными им интернет-ресурсами (см. ниже раздел **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**).

Для подготовки к экзамену по теме 5, связанной с простейшей задачей вариационного исчисления, студентам можно воспользоваться:

1. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).

Указанное пособие содержат теоретический материал с иллюстрирующими примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения, а также примеры программ на языке MATLAB и задания для выполнения лабораторных работ.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

1. **Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:**
   1. **Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)** | **Шкала оценивания сформированности компетенций** | | | | | | |
| **плохо** | **неудовлетворительно** | **удовлетворительно** | **хорошо** | **очень хорошо** | **отлично** | **превосходно** |
| Не зачтено | | зачтено | | | | |
| Знания | Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибки. | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок. | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. |
| Умения | Отсутствие минимальных умений . Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.  Имели место грубые ошибки. | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме. | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи . Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественным недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продемонстрированы все основные умения,. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном  объеме без недочетов |
| Навыки | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.  Имели место грубые ошибки. | Имеется минимальный  набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач с некоторыми недочетами | Продемонстрированы базовые навыки  при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. | Продемонстрированы навыки  при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов. | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

**Шкала оценки при промежуточной аттестации**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Оценка** | | **Уровень подготовки** |
| зачтено | Превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
| Отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» |
| Очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» |
| Хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» |
| Удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | Неудовлетворитель-  но | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» |
| Плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

* 1. **Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения**
     1. **Контрольные вопросы**

|  |  |
| --- | --- |
| Вопрос | Код формируемой компетенции |
| 1. Понятие измеримого множества. Примеры. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Свойства измеримых множеств. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие измеримой функции. Понятие эквивалентности измеримых функций. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Свойства измеримых функций. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие сходимости по мере и сходимости в смысле п.в.. Свойства сходимости по мере (теорема А.Лебега, теорема Ф.Рисса). | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Структура измеримых функций (теорема Н.Н.Лузина и ее обращение). | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие интеграла Лебега. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Свойства интеграла Лебега. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Теорема Фубини. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие абсолютно непрерывной функции. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие линейного нормированного пространства. Примеры. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие банахова пространства. Примеры. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие линейного ограниченного оператора. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Операции над линейными операторами. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Теорема Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над лебеговым пространством. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Неравенство Гельдера. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие спектра и спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. Обобщенная лемма Гронуолла. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Методы вычисления спектрального радиуса линейного ограниченного оператора. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Применение спектральной теории к доказательству существования и единственности решения линейных дифференциальных уравнений. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Применение спектральной теории к доказательству единственности решения полулинейных дифференциальных уравнений. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Принцип сжимающих отображений. Примеры применения. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Билинейные операторы. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Ограниченность и непрерывность нелинейного оператора. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Производная по направлению и вариация по Лагранжу. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Дифференцируемость по Гато и по Фреше. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Квадратичный функционал. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Вторая вариация и дважды дифференцируемость по Фреше. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Необходимые и достаточные условия локального минимума нелинейного функционала. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Простейшая задача вариационного исчисления. Классификация экстремумов. Экстремали функци­онала и экстремали задачи. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Основные леммы вариационного исчисления. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Необходимые условия слабого локального экстремума в простейшей задаче вариационного исчисле­ния. Уравнение Эйлера. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Задача о брахистохроне. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Задачи вариационного исчисления с вектор-функциями. Система уравнений Эйлера. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Задачи вариационного исчисления с функциями нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Принцип Гамильтона-Остроградского | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Изопериметрические задачи: постановка, принцип Лагранжа, условия регулярности. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Задача Дидоны | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Задача Лагранжа. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления. | ОПК-1, ОПК-2 |
| 1. Понятие о вариационных принципах механики. Принцип Гамильтона –Остроградского. Привести один из примеров (второй закон Ньютона; гармонический осциллятор; уравнение колебаний струны). | ОПК-1, ОПК-2 |

* + 1. **Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции**

**Вариант 1.**

Доказать, что множество  измеримо по Лебегу и найти его меру: , где  – фиксированное число.

**Вариант 2.**

Доказать, что функция , , измерима по Лебегу: .

* + 1. **Типовые задачи для оценки сформированности компетенции**

**Задача 1.**

Найти сопряженный оператор к оператору:

, , .

**Задача 2.**

Вычислить производную Фреше от оператора: .

**Задача 3.**

Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

, ,  .

**Задача 4.**

Найти все допустимые экстремали в задаче:

, , , , .

**Задача 5.**

Найти все допустимые экстремали в задаче:

, , ,  .

1. **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

**а) основная литература**:

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1968 (14), 1972 (5), 1976 (25), 1981 (55), 1989 (93), 2006 (50), 2009 (10).
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1957 (7), 1965 (2), 1969 (17), 2002 (86).

**б) дополнительная литература**:

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: ГИФМЛ. 1961 (18).
2. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. К.: Выща школа, 1990 (1).

**в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре прикладной математики для выдачи студентам**

1. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).

**г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы**:

Фонд электронных изданий ННГУ. Режим доступа: <http://www.unn.ru/books/resources.html>

1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ОС 01.03.03 Механика и математическое моделирование

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 2 июня 2021 года, протокол № 8.

Автор (ы) к.ф.-м.н., доц. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.В.Чернов

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ М.В. Иванченко