МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования**
**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

|  |
| --- |
| Институт информационных технологий, математики и механики |

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО

решением ученого совета ННГУ

протокол от

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_

**Рабочая программа дисциплины**

|  |
| --- |
| Функциональный анализ |

*(наименование дисциплины (модуля))*

Уровень высшего образования

|  |
| --- |
| бакалавриат |

*(бакалавриат / магистратура / специалитет)*

Направление подготовки / специальность

|  |
| --- |
| 01.03.02 Прикладная математика и информатика |

 *(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)*

Направленность образовательной программы

|  |
| --- |
| Математическое моделирование и вычислительная математика |

*(указывается профиль / магистерская программа / специализация)*

Форма обучения

|  |
| --- |
| очная |

*(очная / очно-заочная / заочная)*

Нижний Новгород

 2021 год

1. **Место дисциплины в структуре ОПОП**

Дисциплина Б1.О.22 «Функциональный анализ» относится к обязательной части

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ варианта** | **Место дисциплины в учебном плане образовательной программы** | **Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД** |
| 1 | Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть | Дисциплина Б1.О.22 «Функциональный анализ» относится к обязательной части ООП направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, формируемой участниками образовательных отношений*.* |

1. **Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)**

| **Формируемые компетенции** (код, содержание компетенции) | **Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции** | **Наименование оценочного средства** |
| --- | --- | --- |
| **Индикатор достижения компетенции**\*(код, содержание индикатора) | **Результаты обучения по дисциплине\*\*** |
| *ОПК-1*Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | *ОПК-1.1.* | **Знает** основные понятия функционального анализа, технологию доказательства утверждений и преобразования выражений. | *Собеседование* |
| *ОПК-1.2.* | **Умеет** применять математический аппарат функционального анализа, доказывать основные теоремы и применять полученные знания и методы функционального анализа для анализа задач и для самостоятельного конструирования алгоритмов их практического решения. | *Контрольная работа* |
| *ОПК-1.3.* | **Владеет навыками** применения математического аппарата функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач. | *Контрольная работа* |

1. **Структура и содержание дисциплины**
	1. **Трудоемкость дисциплины**

|  |  |
| --- | --- |
|  | **очная форма обучения** |
| **Общая трудоемкость** | **4** | **з.е.** |
| **Часов по учебному плану** | **144** |
| **в том числе** |  |
| **аудиторные занятия (контактная работа):** |  |
| **- занятия лекционного типа** | **32** |
| **- занятия семинарского типа** | **32** |
| **- занятия лабораторного типа** |  |
| **- текущий контроль (КСР)** | **2** |
| **самостоятельная работа** | **42** |
| **Промежуточная аттестация – экзамен** | **36** |

* 1. **Содержание дисциплины**

| **Очная форма обучения** |
| --- |
| **№** | **Наименование разделов и тем дисциплины** | **Всего(часы)** | в том числе |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**из них | **СР**1**, часы** |
| **ЗЛеТ**2 | **ЗСеТ**3 | **ЗЛаТ**4 | **Всего** |
|  | Метрические пространства. | 20 | 6 | 6 |  | 12 | 8 |
|  | Интегралы Лебега и Лебега-Стилтьеса. | 20 | 6 | 6 |  | 12 | 8 |
|  | Банаховы пространства. Сопряженные пространства. Обобщенные функции. | 26 | 8 | 8 |  | 16 | 10 |
|  | Гильбертовы пространства. Ряды Фурье. | 20 | 6 | 6 |  | 12 | 8 |
|  | Операторы. | 20 | 6 | 6 |  | 12 | 8 |
|  | Промежуточная аттестация (экзамен). | 36 |  |  |  | 36 |  |
|  | Текущий контроль (КСР) | 2 |  |  |  | 2 |  |
|  | ИТОГО | 144 | 32 | 32 | 0 | 102 | 42 |
|  | 1 Самостоятельная работа обучающегося.2 Занятия лекционного типа.3 Занятия семинарского типа.4 Занятия лабораторного типа. |

***Краткое содержание разделов и тем дисциплины***

1. Понятия и примеры метрических пространств. Открытые и замкнутые множества. Компактность в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Принцип сжимающих отображений и его приложения: решение уравнений и систем уравнений, решение интегральных и дифференциальных уравнений.
2. Мера Лебега на прямой и плоскости. Мера Лебега-Стилтьеса. Измеримые функции и их свойства. Определение интеграла Лебега. Классы суммируемых функций. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интеграла Римана с интегралом Лебега. Интеграл Стилтьеса.
3. Линейные нормированные и банаховы пространства. Сопряженное проcтранство, его полнота. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного функционала в некоторых банаховых про странствах. Обобщенные функции и операции над ними.
4. Ортогональные системы. Ряды Фурье по ортогональным системам. Базисы и гильбертова размерность. Общий вид линейного функционала на гильбертовом пространстве.
5. Линейные операторы, норма оператора. Сопряженный оператор. Обратный оператор. Спектр и резольвента. Компактные операторы.

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамен).

1. **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

* повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
* самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
* подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
* подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

1. **Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации
по дисциплине (модулю)**

Фонд оценочных средств включает: контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме *задач (практических заданий)*, *контрольных работ* и контрольные материалы для проведения промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к *зачёту*.

* 1. **Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине**

| **Шкала оценивания сформированности компетенций** | **Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)** |
| --- | --- |
| Знания | Умения | Навыки |
| **плохо** | **не зачтено** | Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа |
| **неудовлетворительно** | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки. | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки. | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки. |
| **удовлетворительно** | **зачтено** | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок. | Продемонстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме. | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами |
| **хорошо** | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами. |
| **очень хорошо** | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов. |
| **отлично** | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок. | Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов. |
| **превосходно** | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки. | Продемонстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов | Продемонстрирован творческий подход к решению нестандартных задач |

**Шкала оценки при промежуточной аттестации**

| **Оценка** | **Уровень подготовки** |
| --- | --- |
| зачтено | превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |
| отлично | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично» |
| очень хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо» |
| хорошо | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо» |
| удовлетворительно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| незачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо» |
| плохо | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо» |

* 1. **Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения**
		1. **Контрольные вопросы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Вопрос | Код компетенции |
|  | Понятие мощности множества. Теорема Кантора.  | ОПК-1 |
|  | Счётные множества, их свойства. | ОПК-1 |
|  | Множества мощности континуум, их свойства.  | ОПК-1 |
|  | Понятие метрического пространства (МП), примеры. | ОПК-1 |
|  | Неравенства Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского. | ОПК-1 |
|  | Открытые и замкнутые множества в МП. Общий вид открытого множества на прямой. Ограниченные и неограниченные множества. | ОПК-1 |
|  | Канторово совершенное множество, его основные свойства. | ОПК-1 |
|  | Понятие точки прикосновения, внутренней, предельной, граничной точек множества. Примеры. | ОПК-1 |
|  | Плотные множества, сепарабельные пространства, примеры. | ОПК-1 |
|  | Фундаментальные и сходящиеся последовательности в МП, их свойства. | ОПК-1 |
|  | Полные МП, примеры с доказательством. | ОПК-1 |
|  | Принцип сжимающих отображений с доказательством. | ОПК-1 |
|  | Применение ПСО. | ОПК-1 |
|  | Компактность в МП. | ОПК-1 |
|  | Критерий Хаусдорфа. | ОПК-1 |
|  | Понятие меры. Продолжение меры по Лебегу. | ОПК-1 |
|  | Измеримые функции и их свойства, примеры. | ОПК-1 |
|  | Различные виды сходимости.  | ОПК-1 |
|  | Интеграл Лебега от простых функций. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.  | ОПК-1 |
|  | Общее понятие интеграла Лебега на множестве конечной меры, основные его свойства. | ОПК-1 |
|  |  Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. | ОПК-1 |
|  |  Функции ограниченной вариации и абсолютно-непрерывные.  | ОПК-1 |
|  |  Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл Лебега-Стилтьеса. | ОПК-1 |
|  |  Пространства суммируемых функций. | ОПК-1 |
|  |  Нормированные пространства (НП), примеры. | ОПК-1 |
|  |  Евклидовы и гильбертовы пространства, примеры, характеристическое свойство. | ОПК-1 |
|  | Ортогональные системы. Ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье. | ОПК-1 |
|  | Минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. | ОПК-1 |
|  | Функционалы в НП.  | ОПК-1 |
|  | Понятие нормы функционала, примеры её вычисления.  | ОПК-1 |
|  | Сопряженное пространство, виды сходимости в нём. | ОПК-1 |
|  | Общий вид НЛФ в некоторых банаховых пространствах. Общий вид НЛФ в евклидовом пространстве. | ОПК-1 |
|  | Обобщенные функции: действия над ними, примеры, дельта- функция. | ОПК-1 |
|  |  Действия над ЛО. Теорема Банаха об обратном операторе. | ОПК-1 |
|  | Сопряженный оператор, примеры. | ОПК-1 |
|  | Эрмитово-сопряженный оператор. Самосопряженный оператор. | ОПК-1 |
|  | Компактные операторы, их свойства, примеры. | ОПК-1 |

* + 1. **Типовые задания/задачи для оценки
		сформированности компетенции   ОПК-1**

**Варианты контрольных работ:**

**Вариант 1:**

1. Найти мощность множества всех многочленов с действительными

 коэффициентами.

2. Проверить аксиомы метрики в метрическом пространстве,

состоящем из натуральных чисел, с метрикой 

3. Записать определение и отрицание определения внутренней точки.

 Для найти множества точек прикосновения,

 предельных, внутренних, изолированных и граничных точек.

4. Доказать полноту пространства  с метрикой

 .

5. Показать, что уравнение имеет единственное решение. Найти
 приближенное решение уравнения и оценить погрешность:
 .

6. Показать, что шар  в пространстве  является замкнутым и
 ограниченным, но не предкомпактным (и не компактным).

**Вариант 2:**

1. Вычислить интеграл Лебега  от функции



1. Доказать, что любое подмножество предкомпактного множества в метрическом пространстве является предкомпактным.
2. Доказать, что функционал ; 

 является линейным, непрерывным и найти его норму.

1. Доказать, что в евклидовом пространстве выполняется равенство параллелограмма .
2. Определить, принадлежат ли пространству  следующие функции: а) ; б) ; в) .

**Варианты экзамена:**

**Вариант 1**

1. Понятие мощности множества. Теорема Кантора. Счётные множества, их свойства.
2. Интеграл Лебега от простых функций. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
3. Доказать, что оператор 

 является компактным.

4. Найти расстояние между последовательностями  и  в пространствах: а) ; б) ; в) .

**Вариант 2**

1. Канторово совершенное множество, его основные свойства.
2. Общее понятие интеграла Лебега на множестве конечной меры,

 основные его свойства.

1. Доказать, что функционал , где ,

 является непрерывным, найти его норму.

4. Проверить, лежат ли в пространстве  функции:

 а) ; б) ; в) .

1. **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

**Литература**

а) основная литература

1. Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу: учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. /Треногин В. А., Писаревский В. М., Соболева Т. С. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 240 с. **(доступно в ЭБС «КОНСУЛЬТАНТ СТУДЕНТА», режим доступа:** <http://www.studentlibrary.ru>).
2. Гуревич А. П. Сборник задач по функциональному анализу: учебное пособие. 2-е изд. / Гуревич А. П. , Корнев В. В., Хромов А. П. - СПб.: Издательство: "Лань", 2012.- 192 с. (доступно в ЭБС «**Лань»,** режим доступа: <http://e.lanbook.com/>).
3. Филимоненкова Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу. – М.: Лань, 2015. – 176 с. Режим доступа: <http://e.lanbook.com/>
4. Леонтьева Т.А., Домрина А.В. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учебное пособие. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с. Режим доступа: <http://www.znanium.com/>

б) дополнительная литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник. 7-е изд. М.: Физматлит, 2009. (10 экз.) (1968 – 7 экз., 1972 – 5 экз., 1976 – 29 экз., 1981 – 55 экз., 1989 – 93 экз., 2006 – 50 экз.)
2. Дерр В.Я. Функциональный анализ: учебное пособие. - М.: Юрайт, 2012. (10 экз.)
3. Хелемский A.Я. Лекции по функциональному анализу. – М.: МЦНМО, 2014. – 560 с. Режим доступа: <http://e.lanbook.com/>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

  <http://www.lib.unn.ru/ebs.html>

1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО 01.03.02 Прикладная математика и информатика

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Автор(ы) |  | к.ф.-м.н., доцент Галкина С.Ю. |
| Рецензент(ы) |  |  |
| Заведующий кафедрой прикладной математики |  | д.ф.-м.н., профессор Иванченко М.В. |

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

от 24.02.2021 года, протокол № 5.