

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный универ-
ситет им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

Директор _____ Гергель В.П.

« ____ » _____ 2017 г.

Рабочая программа дисциплины

Уравнения математической физики

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы
Общий профиль

Квалификация (степень)
бакалавр

Форма обучения
очная

Нижегород

2017

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Уравнения математической физики» относится к базовой части основной образовательной программы бакалавриата по направлению «Математика и компьютерные науки», изучается в пятом и шестом семестрах.

Целями освоения дисциплины являются: фундаментальная подготовка в области уравнений в частных производных; овладение аналитическими методами математической физики; овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

2. Планируемые результаты обучения

соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Код компетенции	Содержание компетенции	Планируемые результаты обучения
ОПК-1 Базовый этап	готовность использовать фундаментальные знания в области теоретической и прикладной механики, механики сплошной среды, математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, численных методов, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов в будущей профессиональной деятельности	З1(ОПК-1) Знать: классификацию уравнений математической физики, основные задачи для уравнений математической физики З2(ОПК-1) Знать: общие схемы основных методов математической физики У1(ОПК-1) Уметь: выводить основные уравнения математической физики, приводить уравнения к каноническому виду У2(ОПК-1) Уметь: применять методы математической физики при решении задач В1(ОПК-1) Владеть: опытом использования знаний и умений в области математической физики при решении различных задач
ПК-2 Базовый этап	способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	З1(ПК-2) Знать: классические постановки задач математической физики, основные методы исследования корректности постановок задач У1(ПК-2) Уметь: математически корректно ставить задачи в терминах математической физики В1(ПК-2) Владеть: опытом математически корректной постановки задач математической физики, приемами исследования корректности постановки задач

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Структура дисциплины

Объем дисциплины составляет 7 зачетных единиц, всего 252 час., из которых 131 час. составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (64 час. занятия лекционного типа, 64 час. занятия семинарского типа, 3 час. мероприятия промежуточной аттестации), 121 час. составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. 36 час. подготовки к экзамену).

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,	Всего (часы)	В том числе	
		Контактная работа (работа во взаи-	и

форма промежуточной аттестации по дисциплине		взаимодействии с преподавателем), часы, из них				Всего	
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Консультации		
5 семестр							
1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными	1	1				1	
2. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка	12	4	4			8	4
3. Вывод основных уравнений математической физики	9	3	2			5	4
4. Уравнение колебаний струны. Метод характеристик. Формула Даламбера	14	4	6			10	4
5. Задачи Коши и Гурса для уравнений гиперболического типа	16	4	6			10	6
6. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Цилиндрические волны.	10	4	2			6	4
7. Основные смешанные задачи для волнового уравнения. Теорема о единственности	14	4	4			8	6
8. Метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний струны	16	4	4			8	8
9. Задача Штурма–Лиувилля	15	4	4			8	7
В т.ч. текущий контроль	2						
Промежуточная аттестация: зачет							
6 семестр							
10. Общая схема метода Фурье в многомерных задачах	24	4	6			10	14
11. Специальные функции математической физики	22	4	4			8	14
12. Уравнения параболического типа. Основные задачи для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Формула Пуассона	26	6	6			12	14
13. Уравнения эллиптического типа. Основные задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Функции Грина	28	6	8			14	14
14. Свойства гармонических функций. Теорема о максимуме и минимуме для гармонических функций	20	6	2			8	12
15. Элементы теории потенциала	22	6	6			12	10
В т.ч. текущий контроль	2						
Промежуточная аттестация: экзамен							

Текущий контроль успеваемости проходит в рамках занятий семинарского типа.

4. Образовательные технологии

Используются образовательные технологии в форме лекций, практических (семинарских) занятий, домашних работ.

Лекционные занятия в основном проводятся в форме «лекция-информация», при необходимости переходящей в форму «лекция-беседа».

Практические занятия направлены на развитие самостоятельности обучающихся и приобретение умений и навыков. Практическое занятие предполагает выполнение

студентами по заданию преподавателя домашних работ с последующей их проверкой и обсуждением на занятиях.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа является важной частью учебного процесса. Цель самостоятельной работы – формирование способностей и навыков к самообразованию и профессиональному совершенствованию. Она вырабатывает у студента культуру умственного труда, воспитывает целеустремленность, систематичность и последовательность в работе, развивает исследовательские способности. Подготовка к зачетно-экзаменационной сессии, сдача зачетов и экзаменов является также самостоятельной работой студента. Необходимо отчетливо понимать, что подготовка к экзамену – это не первичное восприятие материала, а повторение всего учебного материала дисциплины, изучаемого в течение семестра. Поэтому главное – это дисциплинированная и методичная работа в течение семестра.

Только тот студент успевает, кто хорошо усвоил учебный материал. Если студент плохо работал в семестре, пропускал лекции, слушал их невнимательно, не конспектировал, не изучал рекомендованную литературу, то в процессе подготовки к сессии ему придется не повторять уже знакомое, а заново в короткий срок изучать весь учебный материал. Все это зачастую невозможно сделать из-за нехватки времени.

Для такого студента подготовка к зачету или экзамену будет трудным, а иногда и непосильным делом, а конечный результат – возможное отчисление из учебного заведения.

5.1. Виды самостоятельной работы

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы:

- работа над основной и дополнительной литературой;
- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- выполнение домашних практических заданий (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- выполнение контрольных работ (1 раз в семестр),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен, зачет).

5.2. Контрольные вопросы

- 1) Задача Коши для уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Определить вторые производные от решения на начальной кривой.
- 2) Классификация линейных уравнений с частными производными с n независимыми переменными.
- 3) Начальная задача для неоднородного волнового уравнения с тремя пространственными переменными. Почему решение называется запаздывающим потенциалом?
- 4) Начальная задача для неоднородного волнового уравнения.

- 5) Начальная задача для трехмерного волнового уравнения методом сферических средних.
- 6) Определение объемного потенциала. Доказательство его свойств.
- 7) Определение потенциала двойного слоя, его свойства. Как используется потенциал двойного слоя для решения задачи Дирихле?
- 8) Определение сферического среднего. Перечислите его свойства.
- 9) Определение функции Бесселя.
- 10) Основные свойства гармонических функций.
- 11) Постановка задачи Гурса.
- 12) Теорема о непрерывной зависимости решения смешанной задачи для уравнения гиперболического типа от начальных данных.
- 13) Теорема существования решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа.
- 14) Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле.
- 15) Физическая интерпретация формулы Пуассона.
- 16) Формулировка и доказательство теоремы единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности.
- 17) Функция Грина задачи Дирихле. Доказать ее свойства.

5.3. Задания для самостоятельной работы

1. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Привести к каноническому виду уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

3. Привести к каноническому виду уравнение $(1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

4. Решить задачу. Определить тип задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + x \quad (0 < x < \pi), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

5. Струна бесконечной длины $x > 0$ находилась в состоянии равновесия. При $t > 0$ точка $x = 0$ совершает малые колебания $A \sin \omega t$. Показать, что смещение точки с абсциссой $x > 0$ определяется формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x/a \\ A \sin \omega(t - x/a), & t > x/a. \end{cases}$$

6. Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = l/2$. Определить смещение точек струны от положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

7. Однородная квадратная мембрана, имеющая в начальный момент времени $t = 0$ форму $Axy(b-x)(b-y)$, где A – постоянная, начала колебаться без начальной скорости. Исследовать свободные колебания мембраны, закрепленной по контуру.

8. Решить методом разделения переменных

$$u_{tt} = u_{xx} + 2b \quad (b = \text{const}, 0 < x < l), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

9. Решить методом разделения переменных

$$u_{tt} = u_{xx} + \cos t \quad (0 < x < \pi), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

10. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + 1 \quad (0 < x < 1), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

11. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} \quad (0 < x < 1), \quad u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

12. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + u + 2 \sin 2x \sin x \quad (0 < x < \pi/2), \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

Самостоятельная работа студентов обеспечивается доступными учебной и научной литературой, Интернет-ресурсами, которые содержат теоретический материал с иллюстрирующими примерами и упражнения для самостоятельного выполнения, достаточные для подготовки к зачету и экзамену и освоения дисциплины в целом.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

включающий:

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы согласно Карте компетенций по направлению 020301 Математика и компьютерные науки

Код компетенции	Этап формирования	Составляющие компетенций		
		знания	умения и навыки	владение опытом
ОПК-1	базовый	31(ОПК-1) 32 (ОПК-1)	У1(ОПК-1) У2 (ОПК-1)	В1(ОПК-1)
ПК-2	базовый	31(ПК-2)	У1(ПК-2)	В1(ПК-2)

6.2. Описание шкал оценивания

6.2.1. Критерии и шкала для интегрированной оценки уровня сформированности компетенций

Индикаторы компетенции	Оценка сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
<u>Полнота знаний</u>	отсутствие знаний материала	наличие грубых ошибок в основном материале	знание основного материала с рядом негрубых ошибок	знание основного материала с рядом заметных погрешностей	знание основного материала с незначительными погрешностями	знание основного материала без ошибок и погрешностей	знание основного и дополнительным материала без ошибок
<u>Наличие умений</u>	полное отсутствие умений	недостаточно умений	умение использовать отдельные приемы при наличии существенных ошибок	умение использовать отдельные приемы при наличии незначительных ошибок	умение использовать отдельные приемы	умение использовать приемы	умение использовать приемы и способность принимать решение на этой основе
<u>Владение опытом</u>	полное отсутствие	отсутствие на-	наличие мини-	посредственное	достаточное	хорошее владение	всестороннее

	вие на- выков	выков	мальных навыков	владение навыками	владение навыками	навыками	владение навыками
<u>Мотивация</u>	отсутст- вие	недоста- точно	мини- мально	средний уровень	выше среднего	высокий уровень	очень высокий
Оценка по семибалльной шкала							
превосходно							
отлично							
очень хорошо							
хорошо							
удовлетвори- тельно							
неудовлетво- рительно							
плохо							
(личностное отношение)							
<u>Уровень сформирован- ности компе- тенций</u>	нулевой	низкий	ниже среднего	средний	выше среднего	высокий	очень высокий

<u>Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий</u>	0–20	20–50	50–70	70–80	80–90	90–99	100
---	------	-------	-------	-------	-------	-------	-----

Характеристика сформированности компетенции

Уровень сформированности компетенций	Характеристика сформированности компетенции
очень высокий	Сформированность компетенции превышает стандартные требования. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для применения творческого подхода к решению сложных практических (профессиональных) задач.
высокий	Сформированность компетенции полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для решения сложных практических (профессиональных) задач.
выше среднего	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения стандартных практических (профессиональных) задач.
средний	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям, но есть недочеты. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по некоторым профессиональным задачам.
ниже среднего	Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по большинству практических задач.
низкий	Компетенция в полной мере не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач. Требуется повторное обучение
нулевой	Компетенция не сформирована. Отсутствуют знания, умения, навыки, необходимые для решения практических (профессиональных) задач. Требуется повторное обучение

6.2.2. Критерии и шкалы для оценки уровня подготовки обучающегося

Оценивание результатов обучения проводится по традиционным шкалам (семибалльной на экзамене и зачет-незачет на зачете)

Положительные экзаменационные оценки (превосходно – удовлетворительно) и зачтено могут быть выставлены без опроса обучающегося – по результатам работы в течение семестра и текущего контроля успеваемости. О возможности выставления экзаменационных оценок без опроса объявляется обучающимся до начала экзамена (зачёта).

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии: индивидуальное собеседование, устные ответы на вопросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии: практические контрольные задания, включающие одну

или несколько задач (вопросов) в виде краткой формулировки действий (комплекса действий), которые следует выполнить, или описание результата, который нужно получить.

Контроль качества усвоения студентами содержания дисциплины проводится в виде зачета в 5 семестре и экзамена в 6 семестре, на которых определяется: уровень усвоения студентами основного учебного материала по дисциплине; уровень понимания студентами изученного материала; способности студентов использовать полученные знания для решения конкретных задач. Экзамен (зачет) включает теоретическую и практическую часть. Теоретическая часть заключается в ответе студентом на теоретические вопросы курса (с предварительной подготовкой) и последующем собеседовании. Практическая часть предусматривает разбор практической ситуации (решение задачи).

6.4. Типовые контрольные задания для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций, и контроля сформированности компетенций

6.4.1. Примеры задач (практических заданий) для текущего контроля

1. Найти наибольшую область, в которой задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.

$$x^2 U_{xx} - y^2 U_{yy} - 2x U_x = 0$$

$$U|_{y=1} = x, \quad -2 < x < 1, \quad U_y|_{y=1} = x, \quad -2 < x < 1.$$

2. Полуограниченной струне с жестко закрепленным концом $x = 0$ сообщена начальная скорость равная v_0 на отрезке $[c, 2c]$ и нулю вне этого отрезка. Построить профиль струны в момент времени $t_0 = \frac{c}{a}$. Расписать формулы, описывающие профиль струны в момент времени $t_0 = \frac{5c}{3}$.

6.4.2. Варианты контрольных работ

Вариант контрольной работы №1

1. Решить задачу о колебаниях струны, один конец которой ($x=0$) свободен, а другой ($x=\pi$) закреплен жестко. Начальное отклонение и начальная скорость имеют вид:

$$U|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad U_t|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}$$

2. Рассмотреть задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на конце $x=0$ и подверженной на конце $x=l$ действию силы $A \sin \omega t$. Начальные условия нулевые. Найти решение при всех $0 < t < 3l/2a$

Вариант контрольной работы №2

1. К струне, один конец которой ($x=0$) свободен, а другой ($x=l$) закреплен жестко, с момента времени $t=0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $f(x,t)=A \sin \omega t$. Найти колебания струны в среде без сопротивления; исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.
2. Найти стационарную температуру в круглом цилиндре с радиусом основания r_0 и высотой h , если температуры нижнего и верхнего оснований равны соответственно T_0 и $T_0(1 - \frac{r}{r_0})$, а боковая поверхность цилиндра теплоизолирована.

6.4.3. Примеры вопросов, выносимых на экзамен, зачет

Задача Коши для уравнений свободных колебаний струны. Формула Даламбера для решения задачи Коши (ОПК-1)

Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных (ПК-2)

6.4.4. Примеры задач (практических заданий), выносимых на экзамен, зачет

Задания для оценки компетенций «ОПК-1»

1. Получить функцию Грина для шара.
2. Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса R , закрепленной по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю.

Задания для оценки компетенции «ПК-2»

Решить смешанную задачу

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 5 \sin \frac{5\pi x}{l}$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad u(x, t)|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l} \quad u_t(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (x \in (0, l), t > 0).$$

6.4.5. Пример экзаменационного билета

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра математической физики и оптимального управления

Дисциплина Уравнения математической физики

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1.

1. Задача Штурма – Лиувилля. Свойство решений задачи. Ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям (с доказательством).
2. Задача о колебаниях полубесконечной струны с закрепленным концом. Метод продолжения.

Зав. кафедрой _____ Сумин М.И.

Экзаменатор _____ Калинин А.В.

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014. http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest_stud%202014.pdf

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.–М.: Наука, 1971. (75)
2. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Минск, 1964. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
3. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией Владимира В.С.–М.: Наука, 1982.–256с. (83)
4. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Введение в современные методы математической

физики: Эл. учебное пособие. ННГУ. 2014. 120 с.

(<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Рег. № 864.14.06)

5. Жидков А.А., Калинин А.В., Тяхтина А.А. Математические основы современной теории краевых задач для уравнений с частными производными. Эл. уч.-мет. пособие. ННГУ. 2012. 82 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Рег. № 488.12.06)

7.2. Дополнительная литература

6. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции.– М.: 1984. (35)
7. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.–252с.
https://e.lanbook.com/book/70703?category_pk=917#authors
8. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.– М.: Наука, 1972.– 688с.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
9. Калинин А.В., Дерендяев Н.В. Проекционный метод Фурье. Эл. уч.-мет. пособие. ННГУ. 2012. 75 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Рег. № 523.12.08)

7.3. Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Фонд образовательных электрон. ресурсов ННГУ <http://www.unn.ru/books/resources>
2. Библиотека Eqworld (<http://eqworld.ipmnet.ru/>)
3. Библиотека Лань (<https://e.lanbook.com/>).

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории, оборудованные мультимедийной техникой (компьютер, проектор, экран), для проведения занятий лекционного и семинарского типа. В распоряжении студентов, проявляющих высокую учебную активность, также научная литература, учебно-методические материалы, представленные на кафедре математической физики и оптимального управления.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор _____ А.В. Калинин

Рецензент _____

Программа одобрена на заседании кафедры математической физики и оптимального управления Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

от _____ года, протокол № ____.

Заведующий кафедрой _____ М.И. Сумин

Программа одобрена методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

от _____ года, протокол № ____.