

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»

Институт информационных технологий, математики и механики

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «16» июня 2021 г. № 8

**Рабочая программа дисциплины**

Метод конечных элементов

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования  
специалитет

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

Фундаментальная механика и приложения

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород  
2021 год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений

| № варианта | Место дисциплины в учебном плане образовательной программы                              | Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД  |
|------------|---|--|
| 2          | Блок 1. Дисциплины (модули)<br>Часть, формируемая участниками образовательных отношений | Дисциплина Б1.В.ДВ.07.01 «Метод конечных элементов» относится к части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика, формируемой участниками образовательных отношений. |

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)   | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции  |   | Наименование оценочного средства                            |
|---|--|---|---|
|   | Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)   | Результаты обучения по дисциплине**   |   |
| <b>ПК-2.</b> Способен самостоятельно анализировать поставленную задачу, выбирать корректные методы её решения, применять математически сложные алгоритмы в современных специализированных программных комплексах, реализовывать в них новые алгоритмы | <p><b>ПК-2.1. Знает</b> теоретические основы и методологию построения решений фундаментальных задач математики и механики, основы информационных технологий.</p> <p><b>ПК-2.2. Умеет</b> осуществлять анализ и выбор методов и алгоритмов решения задач профессиональной деятельности.</p> <p><b>ПК-2.3. Владеет навыками</b> решения задач математики и механики в соответствии с выбранным методом и построенным алгоритмом с использованием современных программных комплексов.</p> | <p><b>Знает</b> вариационные постановки статических и динамических задач механики деформируемого твердого тела и смежных дисциплин и алгоритмы их решения методом конечных элементов.</p> <p><b>Умеет</b> осуществлять анализ и выбор формулировок и методов решения статических и динамических задач механики деформируемого твердого тела и смежных дисциплин.</p> <p><b>Владеет навыками</b> решения задач механики деформируемого твердого тела и смежных дисциплин методом конечных элементов с использованием современных программных комплексов/</p> | <i>Собеседование</i>  |
| <b>ПК-3.</b> Умеет самостоятельно разрабатывать, исследовать,   | <b>ПК-3.1. Знает</b> классические модели естествознания, методы решения задач,   | <b>Знает</b> классические модели механики, методы решения задач, современные программные комплексы  | <i>Собеседование<br/>Расчетно-графическая<br/>Расчетно-</i> |

| Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)  | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции   |  | Наименование оценочного средства |
|--|---|--|----------------------------------|
|  | Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)  | Результаты обучения по дисциплине**  |                                  |
| применять математические модели для расчётов, проводить расчётные работы и исследования, обработку результатов, оформление отчётной документации | современные программные комплексы для проведения расчётных исследований, методы проведения, обработки и анализа результатов экспериментальных исследований.<br><b>ПК-3.2. Умеет</b> проводить расчётно-экспериментальные исследования, выбирать и применять современные программные комплексы, получать, обрабатывать и анализировать результаты исследований.<br><b>ПК-3.3. Владеет навыками</b> применения математического моделирования и расчётно-экспериментальных исследований. | для проведения расчётных исследований.<br><br><b>Умеет</b> выбирать и применять современные программные комплексы, проводить численные исследования, обрабатывать и анализировать результаты.<br><br><b>Владеет навыками</b> применения метода конечных элементов при численном решении задач механики | <i>графическая</i>               |

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

|  | очная форма обучения |
|--|----------------------|
| <b>Общая трудоемкость</b>                      | <b>5 з.е.</b>        |
| <b>Часов по учебному плану</b>                 | <b>180</b>           |
| <b>в том числе</b>                             |                      |
| <b>аудиторные занятия (контактная работа):</b> |                      |
| - занятия лекционного типа                     | 32                   |
| - занятия семинарского типа                    | 32                   |
| - занятия лабораторного типа                   | 32                   |
| - текущий контроль (КСР)                       | 2                    |
| <b>самостоятельная работа</b>                  | <b>46</b>            |
| <b>Промежуточная аттестация - экзамен</b>      | <b>36</b>            |

### 3.2. Содержание дисциплины

| Очная форма обучения   |              |   |                   |                   |       |                        |
|--|--------------|---|-------------------|-------------------|-------|------------------------|
| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины  | Всего (часы) | в том числе   |                   |                   |       |                        |
|  |              | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы |                   |                   |       | СР <sup>1</sup> , часы |
|  |              | из них  |                   |                   |       |                        |
|  |              | ЗЛеТ <sup>2</sup>   | ЗСеТ <sup>3</sup> | ЗЛаТ <sup>4</sup> | Всего |                        |
| Основы МКЭ. Постановка задачи теории упругости и теплопроводности. Вариационная постановка. МКЭ как вариант метода Ритца. Простейшие задачи. | 18           | 4   | 4                 | 4                 | 12    | 6                      |
| Обобщенные вариационные формулировки   | 5            | 2   |                   |                   | 2     | 3                      |
| Простейшие аппроксимации в конечных элементах  | 18           | 4   | 4                 | 4                 | 12    | 6                      |
| Семейства конечных элементов различной мерности  | 18           | 4   | 4                 | 4                 | 12    | 6                      |
| Криволинейные элементы. Изопараметрическая технология  | 22           | 4   | 6                 | 6                 | 16    | 6                      |
| Точность, устойчивость, сходимость метода конечных элементов. Проблемы сдвигового и объемного записания                                      | 18           | 4   | 4                 | 4                 | 12    | 6                      |
| Вычислительные вопросы МКЭ   | 18           | 4   | 4                 | 4                 | 12    | 6                      |
| МКЭ для задач устойчивости и динамики конструкций  | 24           | 6   | 6                 | 6                 | 18    | 7                      |
|  | 142          | 32  | 32                | 32                | 96    | 46                     |
| <sup>1</sup> Самостоятельная работа обучающегося.  |              |   |                   |                   |       |                        |
| <sup>2</sup> Занятия лекционного типа.   |              |   |                   |                   |       |                        |
| <sup>3</sup> Занятия семинарского типа.  |              |   |                   |                   |       |                        |
| <sup>4</sup> Занятия лабораторного типа.   |              |   |                   |                   |       |                        |

Текущий контроль успеваемости реализуется в рамках занятий семинарского и лабораторного типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционных формах (экзамен).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное решение задач (3 задачи в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (экзамен).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

#### 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)

**Фонд оценочных средств включает** контрольные материалы для проведения текущего контроля в расчетно-графических работ, собеседования и промежуточной аттестации в форме вопросов и заданий к экзамену.

## 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Шкала оценивания сформированности компетенций |            | Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)   |   |   |
|---|------------|--|---|---|
|   |            | Знания   | Умения  | Навыки  |
| <b>плохо</b>                                  | не зачтено | Отсутствие знаний теоретического материала.<br>Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Отсутствие минимальных умений.<br>Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа   | Отсутствие владения материалом.<br>Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа |
| <b>неудовлетворительно</b>                    |            | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.   | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.   | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки. Имели место грубые ошибки.                    |
| <b>удовлетворительно</b>                      | зачтено    | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.  | Продemonстрированы основные умения.<br>Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.                            | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами                           |
| <b>хорошо</b>                                 |            | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок                            | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами.                          |
| <b>очень хорошо</b>                           |            | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок                      | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.                      | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.                           |
| <b>отлично</b>                                |            | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.   | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.          | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.                                 |
| <b>превосходно</b>                            |            | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.   | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов                                    | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач   |

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка |             | Уровень подготовки   |
|--------|-------------|--|
| зачт   | превосходно | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно» |

| Оценка     |                     | Уровень подготовки   |
|------------|---------------------|--|
|            | отлично             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»                     |
|            | очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»           |
|            | хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»                       |
|            | удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| Не зачтено | неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»  |
|            | плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

| Вопросы  | Код формируемой компетенции |
|--|-----------------------------|
| 1. Основная идея МКЭ.  | ПК-2                        |
| 2. Метод Рунге на кусочно-гладких базисных функциях  | ПК-2                        |
| 3. Общая схема МКЭ.  | ПК-2, ПК-3                  |
| 4. Локальная и глобальная системы координат. Преобразование матрицы жесткости и вектора узловых сил КЭ при переходе к новой системе координат.                           | ПК-2                        |
| 5. Локальная и глобальная нумерация неизвестных. Составление глобальной матрицы жесткости системы. Полуширина ленты СЛАУ. Рациональная и нерациональная нумерация узлов. | ПК-2                        |
| 6. Учет граничных условий  | ПК-2                        |
| 7. Учет граничных условий в системе координат, не совпадающей с глобальной.  | ПК-2                        |
| 8. Вычисление внутренних усилий в элементах фермы.   | ПК-2                        |
| 9. Особенности расчета пространственных ферм.  | ПК-2                        |
| 10. Дифференциальная и вариационная постановки задачи плоской задачи теории упругости.   | ПК-2                        |

|   |      |
|---|------|
| 11. Треугольный элемент с линейными функциями формы.  | ПК-2 |
| 12. Четырехугольный элемент с билинейными функциями формы.  | ПК-2 |
| 13. Анализ аппроксимаций перемещений. Ложный сдвиг. Моментная схема конечных элементов.   | ПК-2 |
| 14. Гибридная формулировка, основанная на предположении о законе изменения напряжений.  | ПК-2 |
| 15. Прямоугольные КЭ. Сирендипово семейство функций формы.  | ПК-2 |
| 16. Прямоугольные КЭ. Лагранжево семейство функций формы.   | ПК-2 |
| 17. Семейство треугольных элементов. Естественные координаты.   | ПК-2 |
| 18. Криволинейные конечные элементы. Аппроксимация геометрии КЭ. Суб-, изо- и суперпараметрические КЭ.  | ПК-2 |
| 19. Технология построения матрицы жесткости изопараметрических КЭ. Численное интегрирование. Квадратурные формулы Гаусса. Выбор необходимого порядка точности интегрирования. | ПК-2 |
| 20. КЭ для решения задач изгиба пластин. Проблема совместности.   | ПК-2 |
| 21. Четырех и треугольные КЭ для пластин по модели Кирхгофа.  | ПК-2 |
| 22. Расчет пространственных и оболочечных систем. Конечные элементы стержней и пластин по модели Рейснера-Тимошенко. Требование C0 непрерывности базисных функций.            | ПК-2 |
| 23. Изопараметрические элементы для расчета пластин и оболочек.   | ПК-2 |
| 24. Понятие и определение точности, сходимости и устойчивости численного метода.  | ПК-2 |
| 25. Ошибки, возникающие при применении МКЭ. Анализ ошибок вычислений. Число обусловленности матриц СЛАУ. Зависимость числа обусловленности от различных факторов.             | ПК-3 |
| 26. Совместные элементы. Критерий полноты.  | ПК-2 |
| 27. Несовместные элементы. Кусочный тест Айронса.   | ПК-2 |
| 28. Анализ сходимости решений для различных типов конечных элементов.   | ПК-3 |

#### **5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-2**

1. Записать принцип Лагранжа для случая плоской теории упругости
2. Сформулировать критерий полноты. Показать эквивалентность альтернативных формулировок в виде одного и двух утверждений

#### **5.2.3. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ПК-3**

1. Характеризовать методы решения систем линейных уравнений в программном комплексе ANSYS
2. Записать основной алгоритм МКЭ

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

| №  | а) основная литература:  | К-во <sup>1</sup> |
|----|--|-------------------|
| 1. | Капустин С.А. Метод взвешенных невязок решения задач механики деформируемых тел и теплопроводности: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 60 с. ( <a href="http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/19.pdf">http://www.unn.ru/pages/e-library/methodmaterial/files/19.pdf</a> ). | Э                 |
| 2. | Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. - 428 с. - 3экз. <a href="https://dwg.ru/dnl/3236">https://dwg.ru/dnl/3236</a>  | Э,<br>3 экз.      |
| 3. | Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летальных аппаратов. М.: ВШ, 1985. . - 391 с. - 3экз. <a href="http://bookfi.net/book/543719">http://bookfi.net/book/543719</a>  | Э                 |

| №  | б) дополнительная литература:   | К-во <sup>1</sup> |
|----|---|-------------------|
| 1. | Деклу Ж. Метод конечных элементов, перев. с фр. М.: Мир, 1976. 96 с. ( <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Deklu1976ru.djvu">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Deklu1976ru.djvu</a> ).                                 | Э                 |
| 2. | Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике, перев с англ. М.: Мир, 1975. 543 с. ( <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zenkevich1975ru.djvu">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zenkevich1975ru.djvu</a> ).          | Э                 |
| 3. | Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов, перев. с англ. М.: Мир, 1977. 351 с. ( <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/StrengFiks1977ru.djvu">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/StrengFiks1977ru.djvu</a> ). | Э                 |
| 4. | Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. . - 392 с. - 5экз.  | Э                 |
| 5. | Норри Дж., Де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М.-: Мир, 1981. - 304 с. - 5экз  | 1                 |
| 6. | Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории пластин и оболочек. Рига.: Зинатне, 1988.  | 1                 |
| 7. | Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань, 1989, - 269 с. - 1экз..  | —                 |
| 8. | Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. - 542 с.. - 4экз..   | —                 |

| №  | в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы<br>(в соответствии с содержанием дисциплины)  | «Л»<br>или<br>«С» <sup>2</sup> |
|----|---|--------------------------------|
| 1. | <a href="http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/difgeometry.htm</a>     | С                              |
| 2. | ANSYS Help версии 15, 16, 17  | Л                              |
| 3. | <a href="http://www.emt.ru">http://www.emt.ru</a>   | С                              |
| 4. | <a href="http://www.fea.ru/">http://www.fea.ru/</a>   | С                              |
| 5. | <a href="http://www.cae.ru/">http://www.cae.ru/</a>   | С                              |
| 6. | <a href="http://mysopromat.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?catselect=feaprogramms">http://mysopromat.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?catselect=feaprogramms</a> | С                              |
| 7. |   | С                              |

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий лекционного и семинарского типа, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения: мультимедийная техника (компьютер, проектор, экран). Компьютерные классы 2 и 6 корпусов ННГУ, лицензионные программы ANSYS Academic Teaching Advanced (25 Tasks) – 2

<sup>1</sup>Указывается количество экземпляров в библиотеке ННГУ. Если издание доступно в электронном виде (указана ссылка), указывается буква «Э».

<sup>2</sup>Указывается буква «Л», если программное обеспечение – лицензионное, или «С» – в свободном доступе.



лицензии.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01  
Фундаментальные математика и механика.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики  
от 2 июня 2021 года, протокол № 8.

|          |       |                                |
|----------|-------|--------------------------------|
| Автор(ы) | _____ | к.т.н., доцент<br>Леонтьев Н.В |
|----------|-------|--------------------------------|

|              |       |
|--------------|-------|
| Рецензент(ы) | _____ |
|--------------|-------|

|  |       |                                      |
|--|-------|--------------------------------------|
| Заведующий кафедрой<br>теоретической, компьютерной и<br>экспериментальной механики | _____ | д.ф.-м.н., профессор<br>Игумнов Л.А. |
|--|-------|--------------------------------------|