МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от «16» июня 2021 г. № 8

Рабочая программа дисциплины

Случайные процессы
(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования
специалитет
(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность
01.05.01 «Фундаментальные математика и механика»
(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы
Фундаментальная механика и приложения
(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения
очная
(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород
2021 год

1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.32 Случайные процессы относится к обязательной части ООП специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	**Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции**		**Наименование оценочного средства**
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	**Результаты обучения по дисциплине****	
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	**УК-1.1. Знать** методы критического анализа проблемных ситуаций.	**Уметь** воспринимать, обобщать и анализировать информацию; **Уметь** логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь. **Владеть** математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры.	*Собеседование*
ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	**ОПК-1.1**. **Знает** основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук. **ОПК-1.2**. **Умеет** формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук. **ОПК-1.3**. **Имеет практический опыт** постановки и решения актуальных задач математики и механики.	**Знать** основные понятия теории случайных процессов. **Знать** основные свойства и классификацию потоков событий. **Владеть** навыками вычисления вероятности состояний для цепи Маркова.	*Собеседование* *Задачи* *Задачи*
ОПК-2. Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	**ОПК-2.1**. **Знает** основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования. **ОПК-2.2**. **Умеет** осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на ос-	**Уметь** формулировать содержательные проблемы в форме задач теории случайных процессов. **Уметь** описывать марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.	*Собеседование* *Задачи*

	нове теоретических знаний в области математических и компьютерных наук.		
ПК-4. Имеет опыт самостоятельного проведения работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследования	**ПК-4.1. Знает** особенности поиска научно-технической информации в различных источниках, методов и технологий её обработки и анализа, а также способов представления. **ПК-4.2. Умеет** организовать целенаправленный поиск информации в различных источниках, выбирать методы и технологии её обработки, анализа и представления, исходя из поставленной задачи. **ПК-4.3. Владеет навыками** поиска и анализа научно-технической информации в различных источниках для решения стандартных профессиональных задач, а также опыт публичного представления научных результатов.	**Знать** предельные теоремы теории потоков. **Уметь** осуществлять преобразование случайных процессов. **Владеть** навыками определения стационарного режима для цепи Маркова.	*Собеседование*

1. **Структура и содержание дисциплины**

3.1. Трудоемкость дисциплины

	очная форма обучения
Общая трудоемкость	**3 з.е.**
Часов по учебному плану	**108**
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа): **- занятия лекционного типа** **- занятия семинарского типа** **- Контроль самостоятельной работы (КСР)**	**49** **32** **16** **2**
самостоятельная работа	**59**
Промежуточная аттестация – зачет	

3. Структура и содержание дисциплины «Случайные процессы»

<u>Содержание дисциплины</u>

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, **форма промежуточной аттестации по дисциплине**	**Всего (часы)**	в том числе	
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них	**Самостоятельная работа студента часы**

		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Лабораторные работы		Всего контактных часов	СРС		
Основные понятия теории случайных процессов.	12	4	2			6	6		
Потоки событий, их свойства и классификация. Некоторые свойства потоков Пальма. Потоки Эрланга.	14	4	2			6	8		
Предельные теоремы теории потоков.	14	4	2			6	8		
Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова). Граф состояний, классификация состояний, вероятности состояний.	18	6	2			8	10		
Стационарный режим для цепи Маркова.	13	4	2			6	7		
Описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова.	14	4	2			6	8		
Однородные марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения для предельных вероятностей.	12	4	2			6	6		
Преобразования случайных процессов	10	2	2			4	6		
Всего	107	32	16			48	59		
В т.ч. текущий контроль	1		1						
Промежуточная аттестация. Зачет									

4. Образовательные технологии

При проведении практических занятий по дисциплине «Случайные процессы», а также при выполнении студентами домашних, самостоятельных и контрольных работ, используются учебно-методические пособия и практикумы, разработанные автором программы. Самостоятельная работа обучающихся реализуется в следующих формах: выполнение домашних заданий по дисциплине; самостоятельное изучение некоторых теоретических вопросов.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

a. Виды самостоятельной работы студентов

- Ознакомление с теоретическим материалом по источникам, указанным в списке литературы.
- Ответы на вопросы самоконтроля.

b. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

- Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. – М.: Физматлит, 2012.
- Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000.
- ВВЕДЕНИЕ В ОБЩИЕ ЦЕПИ МАРКОВА. Авторы: Зорин А.В., Зорин В.А., Пройдакова Е.В., Федоткин М.А.: Учебно–методическое пособие – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с.

6. **Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине,** включающий:

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования.

Карта компетенций для оценивания умений, знаний и навыков

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»
Умения *УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ПК-4*	отсутствует способность решения стандартных задач	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	способность решения основных стандартных задач с негрубыми ошибками	способность решения всех стандартных задач с незначительными погрешностями	способность решения всех стандартных задач без ошибок и погрешностей	способность решения стандартных и некоторых нестандартных задач	способность решения стандартных задач и широкого круга нестандартных задач
Знания	отсут-	наличие	знание	знание	знание	знание	знание

УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ПК-4	ствие знаний материала	грубых ошибок в основном материале	основного материала с рядом негрубых ошибок	основного материалом с рядом заметных погрешностей	основного материала с незначительными погрешностями	основного материала без ошибок и погрешностей	основного и дополнительным материалом без ошибок и погрешностей
Навыки *УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ПК-4*	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимально необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех основных навыков, продемонстрированных в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных и нестандартных ситуациях
Личностные качества *УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ПК-4*	соответствующие личностные качетсва не сформированы	сформированность личностных качеств недостаточный для достижения основных целей обучения	сформированность личностных качеств минимально необходимая для достижения основных целей обучения	личностные качества в целом сформирваны	сформированные личностные качества достаточны для достижения целей обучения	Личностные качества сформированы на высоком уровне	Сформированность личностных качеств выше обязательных требований
Шкала оценок по проценту правильно выполненных контрольных заданий	0 – 20 %	20 – 50 %	50 – 70 %	70-80 %	80 – 90 %	90 – 99 %	100%

6.2. Описание шкал оценивания

Для оценивания результатов учебной деятельности студентов при изучении дисциплины «Случайные процессы» используется балльная система (см. п. 6.3). По результатам итоговой аттестации проставляются оценки «Зачтено» (соответствует уровням оценки компетенций «удовлетворительно» и выше) и «Не зачтено» (соответствует уровням оценки компетенций «плохо» и «неудовлетворительно»).

На зачёте проверяется в основном способность решения практических задач.

Зачет.

Зачтено	выполнены задания тестирования, контрольных работ за семестр
Не зачтено	не выполнены задания тестирования и контрольных работ за семестр

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций.

Для оценивания результатов обучения в виде знаний умений и навыков используются следующие процедуры и технологии:

- тестирование;
- письменные ответы на вопросы;
- устные ответы на вопросы преподавателя;
- индивидуальное собеседование на итоговом зачете.

Критерий оценивания результатов тестирования

Баллы, %	*Оценка*
96-100	*Отлично*
71-95	*Хорошо*
51-70	*Удовлетворительно*
0-50	*Неудовлетворительно*

Критерии оценок выполнения контрольной работы

(каждая задача оценивается в 1 балл)

Решена полностью	1
Решена основная часть задачи, или задача решена с недочетами	0,5
Решение неверное, решение отсутствует	0

Суммарная оценка выполнения контрольной работы

Количество баллов	Оценка
5	Отлично
4,5	Очень хорошо
4 - 3,5	Хорошо
3 - 2,5	Удовлетворительно
2 - 1,5	Неудовлетворительно
1 - 0	Плохо

6.4. Типовые вопросы и задачи для оценки результатов формирования компетенций.

Примеры тестовых вопросов:

1. Тип – множественный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Отметьте верные утверждения?

- Случайный процесс есть однопараметрическое семейство $\{\xi(t) : t \in T\}$ случайных элементов, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$. (+)
- Случайный процесс есть однопараметрическое семейство $\{\xi(t) : t \in T\}$ случайных элементов, заданных на разных вероятностных пространствах $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}_t(\cdot)), t \in T$.
- Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ может меняться непрерывно. (+)
- Параметр t для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ может меняться дискретно. (+)

2. Тип – одиночный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Укажите ошибочное высказывание?

- Поточечное задание случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ заключается в определении при каждом $\omega \in \Omega$ и $t \in T$ отображения $\xi(\omega, t)$: $\Omega \times T \to X$, где X есть пространство состояний составного эксперимента E.
- Если $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом, то при каждом $t \in T$ имеет место свойство измеримости вида $\{\omega: \xi(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{F}$ для всех $B \in \Re$, где σ-алгебра $\Re$ суть подмножества множества X.
- Если $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом, то значение $\xi(\omega, t) \in X$ есть состояние составного эксперимента E в момент t или состояние эксперимента E_t.
- Пусть $\{\xi(t) : t \in T\}$ является случайным процессом и $(X, \Re)$ есть измеримое пространство его состояний. Тогда семейство $\{\mathbf{P}(\{\omega: \xi(t_1) \in B_1, \xi(t_2) \in B_2, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\}): t_1, t_2, \ldots, t_n \in T; B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Re\}$ не является его конечномерным распределением. (+)

3. Тип – множественный выбор.

Пусть E есть статистически устойчивый эксперимент и $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является его вероятностной моделью. Укажите верные высказывания?

- Случайный процесс $\{\xi(t) : t \in T\}$ может быть дискретным по времени и по пространству. (+)
- Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и любых моментов $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется с независимыми приращениями.
- Случайный процесс $\{\xi(t) : t \in T\}$ может быть дискретным по времени и непрерывным по пространству. (+)
- Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и для любых $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \ldots, \xi(t_{n-1}) - \xi(t_n)$ для случайного процесса $\{\xi(t) : t \in T\}$ независимы в совокупности, то процесс называется с независимыми сечениями.

4. Тип – ввод значения.

Пусть случайный процесс $\{\xi(t): -\infty < t < +\infty\}$ задается соотношением $\xi(\omega, t) = \eta(\omega)\sin(bt)$, где $\eta(\omega)$ является одномерной случайной величиной, $\mathrm{M}\eta = a, \mathrm{D}\eta = \sigma^2$ и b, a, σ являются постоянными величинами. Вычислить при $a = b = \sigma = 1, t = \pi/2, t_1 = 3\pi/2$ и $t_2 = 5\pi/2$ следующие характеристики этого процесса: 1) $\mathrm{M}(\xi(t))$; 2) $\mathrm{D}(\xi(t))$; 3) $\mathrm{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2))$.

Примечание: ответ следует вводить в виде знакового числа (напр., -7)

- #Ответ1#$\mathrm{M}(\xi(t))$=#1#
- #Ответ2#$\mathrm{D}(\xi(t))$=#1#
- #Ответ3#$\mathrm{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2))$=# –1#

5. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Укажите верные высказывания?

- Схема независимых испытаний Бернулли является цепью Маркова. (+)
- Схема независимых испытаний Бернулли не является однородной цепью Маркова.
- Если условные вероятности $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\})$ не зависят от n, то схема Маркова называется однородной. (+)

- Пусть вероятности $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_0 = a_0, \xi_1 = a_1, \ldots, \xi_{n-1} = a_{n-1}, \xi_n = a_n\}) = p_j$ для всех $n, a_0, a_1, \ldots, a_n, j \in \{0, 1, \ldots\}$. Тогда схема Маркова является однородной. (+)

6. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Отметьте ошибочное утверждение?

- Если $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при каждом $n = 0, 1, \ldots$ случайная величина $\eta_n = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$, то последовательность $\{\eta_n; n = 0, 1, \ldots\}$ является неоднородной марковской цепью. (+)
- Если $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть последовательность независимых случайных величин и при каждом $n = 0, 1, \ldots$ случайная величина $\eta_n = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$, то последовательность $\{\eta_n; n = 0, 1, \ldots\}$ является однородной марковской цепью.
- Пусть условные вероятности $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ и $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = i\}) = p_i$ для всех $i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда $p_i \geq 0, p_{i,j} \geq 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1,\ \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$.
- Однородная цепь Маркова может быть задана множествами $X = \{0, 1, \ldots\}$, $T = \{0, 1, \ldots\}$, начальным распределением $\{p_i: i = 0, 1, \ldots\}$ и условными вероятностями перехода за одно испытание следующего вида $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j},\ i, j = 0, 1, \ldots$

7. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Укажите верные высказывания?

- Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$ и $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$ Тогда $p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}$.
- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$ и $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $j, i = 0, 1, \ldots$, то $p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(n-1)} p_{i,j}$. (+)
- Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots)$, $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$

Тогда $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова.

- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\})$, $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots)$, $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{n+1} = j\} | \{\omega: \xi_n = i\}) = p_{i,j}$ для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$ Тогда $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \times \Pi^n$, где Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова. (+)

8. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть однородная цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Укажите ошибочное утверждение?

- Пусть при $r = 1, 2, \ldots$ условная вероятность $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} | \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(k, r)$, где $k, i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$.
- Если условная вероятность $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} | \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(k, r)$, где $k, r, i, j = 0, 1, \ldots$, то переходная вероятность $p_{i,j}(k, r)$ схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании к состоянию с номером j в $(k + r)$-м испытании не зависит от k и обозначается через $p_{i,j}(r)$. (+)
- Если условная вероятность $\mathbf{P}(\{\omega: \xi_{k+r} = j\} | \{\omega: \xi_k = i\}) = p_{i,j}(r)$, то имеет место равенство $p_{i,j}(k + r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{i,m}(k) p_{m,j}(r)$, где $r = 1, 2, \ldots$ и $k, i, j = 0, 1, \ldots$
- Пусть Π есть матрица из вероятностей перехода за одно испытание схемы Маркова и $p_{i,j}(r)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за r шагов от состояния с номером i в k-м испытании в состояние с номером j в $(k + r)$-м испытании. Тогда имеет место соотношение $\Pi^n = \|p_{i,j}(n)\|_{i,j=0,1,\ldots}$, для всех $n = 1, 2, \ldots$.

9. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть однородная цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний. Отметьте верные утверждения?

- Пусть $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\}), p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = j\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за $n \geq 1$ шагов от состояния с

номером i в состояние с номером j для всех $i, j = 0, 1, \ldots$ Тогда
$p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n), j = 0, 1, \ldots$ (+)

- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\}), p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = j\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность однородной схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$, то
$p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n), j = 0, 1, \ldots$

- Если $p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\}), p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = j\})$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j, то $p_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{i,j}(n+1)$, где для всех $n, j, i = 0, 1, \ldots$ (+)

- Пусть
$p_j^{(n)} = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_n = j\}), \mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots), p_i = \mathbf{P}(\{\omega: \xi_0 = i\}), \mathrm{p} = (p_0, p_1, \ldots)$ и $p_{i,j}(n)$ переходная вероятность схемы Маркова за $n = 1, 2, \cdots$ шагов от состояния с номером i в состояние с номером j для всех $i, j = 0, 1, \ldots$
Тогда
$\mathbf{p}^{(n)} = \mathrm{p} \left\| p_{i,j}(n) \right\|_{i,j=0,1,\ldots}$ (+)

10. Тип – одиночный выбор.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ есть переходная вероятность схемы Маркова за n шагов от состояния с номером i в состояние с номером j. Укажите справедливое высказывание?

- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такое целое число $n_1 \geq 0$, что $p_{i,j}(n_1) > 0$.
- Любые два состояния с номером i и с номером j сообщаются, если существуют такие целые числа $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$, что одновременно $p_{i,j}(n_1) > 0$ и $p_{j,i}(n_2) > 0$. (+)
- Состояние с номером i назовём несущественным, если существует такое состояние с номером j и натуральное число r, что $p_{i,j}(r) > 0$.

11. Тип – множественный выбор.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{I}, \mathbf{P}(\cdot))$ является вероятностной моделью E статистически устойчивого эксперимента и случайная последовательность $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть цепь Маркова с пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ состояний, для которой $p_{i,j}(n)$ есть переходная вероятность схемы Маркова за *n* шагов от состояния с номером i в состояние с номером j. Укажите верные утверждения?

- Состояние с номером i назовём несущественным, если существует такое состояние с номером j и натуральное число r, что $p_{i,j}(r) > 0$, однако $p_{j,i}(n) = 0$ для всех $n \geq 1$. (+)
- Период $d(i)$ состояния с номером i есть наименьшее общее кратное всех натуральных чисел *r*, для которых $p_{i,i}(r) > 0$.
- Период $d(i)$ состояния с номером i есть наибольший общий делитель всех натуральных чисел r, для которых $p_{i,i}(r) > 0$. (+)
- Пусть период $d(i)$ любого состояния с номером i меньше двух и каждое состояние цепи Маркова может быть достигнуто из любого другого её состояния. Тогда предел $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n)$ существует для каждой упорядоченной пары (i, j) и не зависит от i. (+)

12. Тип – ввод значения.

Пусть семейство $\{\xi_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ является цепью Маркова, для которой пространство состояний имеет вид $X = \{0, 1, 2\}$ и вероятности перехода за одно испытание равны:
$p_{0,0} = p_{0,1} = p_{1,0} = p_{1,1} = 1/2,\ p_{2,0} = 1,\ p_{0,2} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = 0$. Вычислить следующие предельные вероятности: 1) p_0^*; 2) p_1^*; 3) p_2^*.

Примечание: ответ следует вводить в виде целого числа или несократимой дроби (m/n).

- #Ответ1# p_0^*=#1/2#
- #Ответ2# p_1^*=#1/2#
- #Ответ3# p_2^*=#0#

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Случайные процессы»

а) основная литература:

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. 35 экз.
2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. – М.: Физматлит, 2012. 196 экз.

3. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов.-М.: Наука, 1965. 46 экз.

б) дополнительная литература:

1. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов.- М.: Наука, 1996. 8 экз.
2. Свешников А.А. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. – М.: Наука, 1970. 45 экз.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы.

1. Интернет-ресурсы электронного портала ИИТММ http://www.itmm.unn.ru/studentam/uchebno-metodicheskie-materialy/
2. Фонд образовательных электронных ресурсов ННГУ им. Лобачевского http://www.unn.ru/books/resources.html
3. Общероссийский математический интернет-портал http://mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения аудиторных занятий требуется аудитория, оснащенная партами, стульями, учебной доской, мелом. Учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде, в электронных библиотеках и на кафедре математического обеспечения и суперкомпьютерных технологий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» (специализация «Фундаментальная механика и приложения»).

Автор ______________________Е.В. Пройдакова

Заведующий кафедрой _______________ Р.Г. Стронгин

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики
от 2 июня 2021 года, протокол № 8.