

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

\_\_\_\_\_ В.П. Гергель

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2020

## **Рабочая программа дисциплины**

**Функциональный анализ**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

**бакалавриат**

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

**01.05.01 Фундаментальная математика и механика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**Фундаментальная механика и приложения**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

**очная**

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2020 год

## Лист актуализации

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_\_\_\_ 2019 г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2019-2020 учебном году на заседании кафедры

\_\_\_\_\_

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2020-2021 учебном году на заседании кафедры

\_\_\_\_\_

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2021-2022 учебном году на заседании кафедры

\_\_\_\_\_

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

---

---

### Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Председатель МК  
\_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2022-2023 учебном году на заседании кафедры

\_\_\_\_\_

Протокол от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_

### 1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1 Дисциплины (модули) Б1.О.19.

### 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции<br>(код, содержание компетенции)   | Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции |   | Наименование оценочного средства |
|--|---|---|----------------------------------|
|  | Индикатор достижения компетенции*<br>(код, содержание индикатора)   | Результаты обучения по дисциплине**   |                                  |
| ОПК-1<br><br>Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики                              | ОПК-1.1.  | <b>Знать</b> основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук.   | собеседование                    |
|  | ОПК-1.2.  | <b>Уметь</b> формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук.                      | Контрольная работа               |
|  | ОПК-1.3.  | <b>Иметь практический опыт</b> постановки и решения актуальных задач математики и механики.   | задачи                           |
| ОПК-2<br><br>Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении | ОПК-2.1.  | <b>Знать</b> основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования.   | собеседование                    |
|  | ОПК-2.2.  | <b>Уметь</b> осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук. | Контрольная работа               |
|  | ОПК-2.3.  | <b>Иметь практический опыт</b> разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности.                                    | задачи                           |

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

|                                |                             |
|--------------------------------|-----------------------------|
|                                | <b>очная форма обучения</b> |
| <b>Общая трудоемкость</b>      | <b>4 ЗЕТ</b>                |
| <b>Часов по учебному плану</b> | <b>144</b>                  |
| <b>в том числе</b>             |                             |
| <b>контактная работа:</b>      | <b>65</b>                   |

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| - занятия лекционного типа       | 32 |
| - занятия семинарского типа      | 32 |
| - текущий контроль (КСР)         | 1  |
| самостоятельная работа           | 79 |
| Промежуточная аттестация – зачет |    |

### 3.2. Содержание дисциплины

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины   | Всего (часы) | в том числе   |                           |                            |                        |   |
|---|--------------|---|---------------------------|----------------------------|------------------------|---|
|   |              | контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы |                           |                            |                        | Самостоятельная работа обучающегося, часы |
|   |              | Занятия лекционного типа  | Занятия семинарского типа | Занятия лабораторного типа | Всего контактных часов |   |
| Тема 1. Метрические пространства; открытые и замкнутые множества.   | 6            | 2   | 2                         |                            | 4                      | 5   |
| Тема 2. Компактные множества в метрических пространствах; критерий Хаусдорфа.   | 7            | 2   | 2                         |                            | 4                      | 5   |
| Тема 3. Полнота и пополнение; теорема о стягивающих шарах; принцип сжимающих отображений.   | 7            | 2   | 2                         |                            | 4                      | 5   |
| Тема 4. Топологические пространства; примеры. Определение линейного нормированного пространства; примеры норм; банаховы пространства.   | 7            | 2   | 2                         |                            | 4                      | 5   |
| Тема 5. Скалярное произведение; неравенство Коши – Буняковского – Шварца.   | 7            | 2   | 2                         |                            | 4                      | 5   |
| Тема 6. Ортогональные системы; неравенство Бесселя; базисы и гильбертова размерность; теорема об изоморфизме, ортогональное дополнение. | 7            | 2   | 2                         |                            | 4                      | 6   |
| Тема 7. Сопряженное пространство, его пол-  | 7            | 2   | 2                         |                            | 5                      | 6   |

|  |     |    |    |  |    |    |
|--|-----|----|----|--|----|----|
| нота.  |     |    |    |  |    |    |
| Тема 8. Теорема Хана – Банаха о продолжении линейного функционала.           | 7   | 2  | 2  |  | 5  | 6  |
| Тема 9. Общий вид линейных функционалов в некоторых банаховых пространствах. | 7   | 2  | 2  |  | 5  | 6  |
| Тема 10. Общий вид линейного функционала на гильбертовом пространстве.       | 7   | 2  | 2  |  | 5  | 6  |
| Тема 11. Линейные операторы; норма оператора; сопряженный оператор.          | 9   | 3  | 3  |  | 5  | 6  |
| Тема 12. Самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы; ортопроекторы.    | 9   | 3  | 3  |  | 5  | 6  |
| Тема 13. Принцип равномерной ограниченности; обратный оператор.              | 9   | 3  | 3  |  | 5  | 6  |
| Тема 14. Спектр и резольвента линейного оператора.                           | 9   | 3  | 3  |  | 5  | 6  |
| Текущий контроль (КСР)   | 3   |    |    |  | 1  |    |
| Промежуточная аттестация –зачет.   | 0   |    |    |  |    |    |
| Итого  | 144 | 32 | 32 |  | 65 | 79 |

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

#### 4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В рамках дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы (порядок их выполнения, форма контроля):

- повторение материала, пройденного на занятиях лекционного типа (в течение всего семестра, опрос на занятиях лекционного и семинарского типа),
- самостоятельное изучение отдельных вопросов программы (1 раз в семестр, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к занятиям семинарского типа, решение задач по списку, представленному преподавателем (в течение всего семестра, опрос на занятиях семинарского типа),
- подготовка к промежуточному контролю успеваемости (зачет).

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

| Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций) | Шкала оценивания сформированности компетенций  |  |  |   |  |  |  |
|--|--|--|--|---|--|--|--|
|  | плохо  | неудовлетворительно  | удовлетворительно  | хорошо  | очень хорошо   | отлично  | превосходно  |
|  | Не зачтено   |  | зачтено  |   |  |  |  |
| <u>Знания</u>  | Отсутствие знаний теоретического материала.<br><br>Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа | Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.                                 | Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.  | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок   | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько несущественных ошибок                                | Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.   | Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.   |
| <u>Умения</u>  | Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа                     | При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения.<br><br>Имели место грубые ошибки. | Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами. | Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме. | Продemonстрированы все основные умения, Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов |
| <u>Навыки</u>  | Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие навыков вследствие отказа обучающегося от ответа                   | При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки.<br><br>Имели место грубые ошибки.  | Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами                                      | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами   | Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных задач без ошибок и недочетов.  | Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов.  | Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных задач  |

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

| Оценка | Уровень подготовки |
|--------|--------------------|
|--------|--------------------|

|            |                     |  |
|------------|---------------------|--|
| зачтено    | Превосходно         | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»   |
|            | Отлично             | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»                     |
|            | Очень хорошо        | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»           |
|            | Хорошо              | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»                       |
|            | Удовлетворительно   | Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно» |
| не зачтено | Неудовлетворительно | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»  |
|            | Плохо               | Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»  |

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

| Вопросы   | Код формируемой компетенции |
|---|-----------------------------|
| 1) Определение метрики и метрического пространства. Примеры метрических пространств: $\mathbf{R}^n$ , $C[a,b]$ , $\ell_2$ , $m$ .   | ОПК-1                       |
| 2) Определение предела последовательности в метрическом пространстве. Единственность предела. Что означает сходимость $E_n$ , $D$ , $C[a,b]$ , $\ell_2$ , $m$ . Ограниченность сходящейся последовательности. | ОПК-2                       |
| 3) Окрестность. Теорема отделимости в метрическом пространстве.   | ОПК-1                       |
| 4) Предельная точка. Изолированные точки. Производное множество. Замыкание. Замкнутый шар. Свойства замкнутых множеств. Свойства операции замыкания.  | ОПК-2                       |
| 5) Открытое множество. Открытый шар. Дополнение замкнутого и открытого множеств.  | ОПК-1                       |

|   |       |
|---|-------|
| Свойства открытых множеств.   |       |
| 6) Примеры замкнутого и открытого множеств.   | ОПК-2 |
| 7) Непрерывные отображения метрических пространств.   | ОПК-1 |
| 8) Всюду плотные множества. Пример. Сепарабельные метрические пространства. Примеры сепарабельного и несепарабельного пространств.  | ОПК-2 |
| 9) Нигде не плотные множества. Примеры.   | ОПК-1 |
| 10) Фундаментальные последовательности. Полное метрическое пространство. Примеры полных и неполных метрических пространств.   | ОПК-2 |
| 11) Теорема о вложенных шарах.  | ОПК-1 |
| 12) Сжимающее отображение. Принцип сжимающих отображений.   | ОПК-2 |
| 13) Применение принципа сжимающих отображений:<br>а) к доказательству существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения;<br>б) к нахождению корней уравнений;<br>в) к решению систем линейных уравнений. | ОПК-1 |
| 14) Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода.  | ОПК-2 |
| 15) Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода. Обобщенный принцип сжимающих отображений.   | ОПК-1 |
| 16) Лемма Гейне-Бореля. Компактные множества. Примеры некомпактных множеств в $C[0;1]$ и $\ell_2$ .   | ОПК-2 |
| 17) $\varepsilon$ -сеть. Вполне ограниченные множества. Пример. Предкомпактность. Теорема Хаусдорфа. Основной параллелепипед в $\ell_2$ .   | ОПК-1 |
| 18) Равностепенная непрерывность в $C[a,b]$ . Теорема Арцела. Пример. Свойство непрерывных функций на компакте.   | ОПК-2 |
| 19) Линейные пространства.  | ОПК-1 |
| 20) Линейные функционалы и операторы.   | ОПК-2 |
| 21) Нормированные пространства.   | ОПК-1 |
| 22) Банахово и гильбертово пространства.  | ОПК-2 |
| 23) Теорема Бэра о категории.   | ОПК-1 |
| 24) Ортогональные системы. Теорема об ортогонализации.  | ОПК-2 |
| 25) Ряды Фурье.   | ОПК-1 |



|  |       |
|--|-------|
| 26) Линейные непрерывные функционалы и операторы.  | ОПК-2 |
| 27) Пространство операторов. Их сходимость.  | ОПК-1 |
| 28) Принцип равномерной ограниченности. Теорема об открытом отображении. Теорема Банаха об обратном операторе. | ОПК-2 |
| 29) Спектр. Резольвента.   | ОПК-1 |
| 30) Самосопряженные операторы.   | ОПК-2 |
| 31) Вполне непрерывные операторы.  | ОПК-1 |
| 32) Применение к интегральным уравнениям.  | ОПК-2 |

### 5.2.2. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1 и ОПК-2

#### Варианты контрольных работ:

#### Контрольная работа №1.

##### Вариант 1.

1. Проверить аксиомы метрики в метрическом пространстве,

состоящем из натуральных чисел, с метрикой 
$$\rho(m, n) = \begin{cases} 0, & m = n; \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & m \neq n. \end{cases}$$

2. Доказать полноту пространства  $C[a, b]$  с метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

3. Показать, что уравнение имеет единственное решение. Найти приближенное решение уравнения и оценить погрешность:

$$x^5 + 5x - 3 = 0.$$

##### Вариант 2.

1. Записать определение и отрицание определения внутренней точки. Для

$A = (0, 1; 1] \cup \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  найти множества точек прикосновения, предельных, внутренних, изолированных и граничных точек.

2. Доказать, что любое подмножество предкомпактного множества в метрическом пространстве является предкомпактным.

3. Доказать, что в евклидовом пространстве выполняется равенство параллелограмма  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$

#### Контрольная работа № 2.

## Вариант 1

1. Докажите, что функционал  $\varphi$  является линейным и ограниченным на нормированном пространстве  $X$ , и найдите (или оцените) его норму, если  $X=C[0;3]$ ,  $\varphi(x) = \int_0^3 sx(s)ds$ .
2. Найдите резольвенту и спектр, а также собственные значения и собственные функции оператора  $A(x) = \int_0^\pi \sin 2t \cdot \cos s \cdot x(s)ds$  на пространстве  $H = L^2[0,\pi]$ .

## Вариант 2

1. Докажите, что функционал  $\varphi$  является линейным и ограниченным на нормированном пространстве  $X$ , и найдите (или оцените) его норму, если  $X = \ell_1$ ,  $\varphi(x) = x_1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ .
2. Найдите резольвенту и спектр, а также собственные значения и собственные функции оператора  $A(x) = \int_0^5 ts^2 \cdot x(s)ds$  на пространстве  $H = L^2[0,5]$ .

**Пример вопросов, выносимых на зачет**, для оценивания результатов формирования компетенций ОПК-1 и ОПК-2.

1. С помощью принципа сжимающих отображений решить уравнение  $x^7 + 8x - 3 = 0$ . Оценить погрешность приближённого решения.
2. Найти скалярное произведение функций  $y = \sin x$  и  $g = e^x$  в пространстве  $L_2[0,1]$ .
3. Найти норму функционала  $F : C[0,1] \rightarrow R$ , определяемого формулой

$$F(y) = \int_0^1 (1 - x^2) y(x) dx.$$

## 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1989. 623 с. (93 экз. Ссылка на учетную карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ: <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=93244> ).

б) дополнительная литература:

1. Дерр В.Я. Действительный анализ. М.: Юрайт, 2012. 464 с. (10 экз. Ссылка на учетную карточку в электронном каталоге ФБ ННГУ: <http://www.lib.unn.ru/php/details.php?DocId=435229>).
2. Леонтьева Т.А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с. (доступно в ЭБС «[Znanium.com](http://znanium.com)», режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=377270>).

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Автор: к.ф.-м.н., доц. \_\_\_\_\_ Галкин О.Е.

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой прикладной математики,

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Иванченко М.В.