

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского»**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО  
решением Ученого совета ННГУ  
протокол от «16» июня 2021 г. № 8

## **Рабочая программа дисциплины**

### **Вариационное исчисление и методы оптимизации**

(наименование дисциплины (модуля))

Уровень высшего образования

специалитет

(бакалавриат / магистратура / специалитет)

Направление подготовки / специальность

**010501 Фундаментальные математика и механика**

(указывается код и наименование направления подготовки / специальности)

Направленность образовательной программы

**Фундаментальная механика и приложения**

(указывается профиль / магистерская программа / специализация)

Форма обучения

очная

(очная / очно-заочная / заочная)

Нижний Новгород

2021год

## 1. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.20 Вариационное исчисление и методы оптимизации относится к обязательной части ООП специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ОПК-1  Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	<b>ОПК-1.1.: Знает</b> основы фундаментальных физико-математических дисциплин и других естественных наук	Знать классические постановки задач конечномерной и бесконечномерной оптимизации, основные численные методы оптимизации, а также аналитические методы решения задач оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности	собеседование
	<b>ОПК-1.2.: Умеет</b> формулировать, анализировать и решать профессиональные задачи с применением фундаментальных знаний математики, физики и других естественных наук	Уметь самостоятельно и корректно использовать методы формализации практических и естественнонаучных задач в виде задач оптимизации, допускающих такую формализацию, а также применять для их решения численные методы оптимизации и аналитические методы решения задач оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности	задачи
	<b>ОПК-1.3.: Имеет практический опыт</b> постановки и решения актуальных задач математики и механики	Иметь практический опыт использования методов формализации прикладных и естественнонаучных задач, возникающих из потребностей научно-исследовательской деятельности, в виде задач оптимизации, при условии, что они допускают такую формализацию, а также применения для их решения численных методов оптимизации и аналитических методов решения задач оптимизации на основе необходимых и достаточных условий оптимальности	задачи

<b>ОПК-2</b> Способен создавать, анализировать и реализовывать новые математические модели в современном естествознании, технике, экономике и управлении	<b>ОПК-2.1.: Знает</b> основные положения, терминологию и методологию в области математического и алгоритмического моделирования	Знать основные положения, терминологию и методологию в области вариационного исчисления и методов оптимизации	собеседование
	<b>ОПК-2.2.: Умеет</b> осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области математических и компьютерных наук	Уметь осуществлять анализ и выбор методов решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области вариационного исчисления и методов оптимизации	задачи
	<b>ОПК-2.3.: Имеет практический опыт</b> разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности	Иметь практический опыт разработки новых методов математического моделирования для решения задач профессиональной и научной деятельности на основе теоретических знаний в области вариационного исчисления и методов оптимизации	задачи

### 3. Структура и содержание дисциплины

#### 3.1. Трудоемкость дисциплины

	<b>очная форма обучения</b>
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>8 ЗЕТ</b>
<b>Часов по учебному плану</b>	<b>288</b>
<b>в том числе</b>	
<b>контактная работа:</b>	<b>131</b>
- занятия лекционного типа	<b>64</b>
- занятия семинарского типа	<b>64</b>
- текущий контроль (КСР)	<b>3</b>
<b>самостоятельная работа</b>	<b>121</b>
<b>Промежуточная аттестация – зачет, экзамен</b>	<b>36</b>

#### 3.2. Содержание дисциплины

<b>Наименование</b>	<b>и</b>	<b>Всего</b>	<b>в том числе</b>
---------------------	----------	--------------	--------------------

		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них				Самостоятельная работа обучающегося, часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Седьмой семестр						
Тема 1. Элементарный выпуклый анализ. Выпуклые множества. Выпуклые конусы. Возможные направления. Выпуклые функции. Критерии выпуклости. Точки минимума выпуклых функций.	25		6		6	19
Тема 2. Гладкие конечномерные задачи на экстремум. Теорема Вейерштрасса и ее следствия. Безусловный минимум: необходимые условия минимума первого и второго порядков, достаточные условия. Условный минимум: принцип Лагранжа в задачах с ограничениями типа равенства и неравенства, регулярность, гладко-выпуклые задачи, условия второго порядка.	37	8	9		17	20
Тема 3. Выпуклые конечномерные задачи на экстремум. Различные формы записи задач выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. Теория двойственности. Случай задач линейного программирования.	43	14	9		23	20
Тема 4. Численные методы конечномерной оптимизации. Терминология. Классификация методов. Одномерный поиск для унимодальных и липшицевых функций. Безусловная минимизация функций нескольких переменных: градиентные методы, метод Ньютона, методы сопряженных направлений для квадратичных функций, метод	38	10	8		18	20

сопряженных градиентов. Условная минимизация функций нескольких переменных: методы штрафных функций, симплекс-метод решения задач линейного программирования.						
<b>Текущий контроль (КСР)</b>	1				1	
<b>Промежуточная аттестация - зачет</b>						
<b>Итого за семестр</b>	144	32	32		65	79
<b>Восьмой семестр</b>						
Тема 5. Простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения. Условия первого порядка. Простейшая задача: классификация экстремумов, варьирование, необходимые условия первого порядка (стационарность, уравнение Эйлера), конкретные примеры (задачи о брахистохроне и о наименьшей поверхности вращения). Принцип Гамильтона-Остроградского и его применения. Обобщения простейшей задачи: экстремальные задачи на линейных многообразиях в линейных нормированных пространствах, задачи со старшими производными, задачи с вектор-функциями, задачи с функциями нескольких переменных, задачи с подвижными границами, задачи на классе кусочно-гладких функций,	26	8	8		16	10
Тема 6. Условия второго порядка в вариационном исчислении. Условия второго порядка в простейшей задаче вариационного исчисления: необходимые условия Лежандра и Якоби слабого минимума, необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, достаточные условия локаль-	26	8	8		16	10

ного минимума.						
Тема 7. Принцип Лагранжа в вариационном исчислении. Вариационные задачи с ограничениями. Изопериметрические задачи. Задачи со связями. Задача Лагранжа. Конкретные примеры: задача Дидоны, задача о цепной линии, задача Чаплыгина о самолете.	26	8	8		16	10
Тема 8. Понятие о математической теории оптимального управления. Управляемые системы. Задачи оптимального управления классического вариационного типа (без ограничений на значения управления). Задачи оптимального управления понтрягинского типа (с ограничениями на значения управления). Принцип максимума Понтрягина. Конкретные иллюстративные примеры.	28	8	8		16	12
<b>Текущий контроль (КСР)</b>	2				2	
<b>Промежуточная аттестация - экзамен</b>	36					
<b>Итого за семестр</b>	144	32	32		66	42
<b>Итого</b>	288	64	64		131	121

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет, экзамен).

#### **4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» включает выполнение заданий под контролем преподавателя, решение домашних заданий и подготовку к зачету и экзамену. Самостоятельная работа студентов (выполнение домашних практических заданий, подготовка к коллоквиуму, экзамену и зачету) обеспечивается доступной студентам основной и дополнительной литературой, а также доступными им интернет-ресурсами (см. ниже раздел)

#### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины).**

Для подготовки к зачету по темам 1 - 3, связанным с математическим программированием, студентам можно воспользоваться:

1. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород:

Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).

2. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
3. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

Указанные пособия содержат теоретический материал с иллюстрирующими подробными примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения.

Для подготовки к зачету и экзамену по темам 4,5, связанным с численными методами оптимизации и простейшей задачей вариационного исчисления, студентам можно воспользоваться:

1. Сумин В.И. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методическая разработка по курсу "Методы оптимизации". - Горький: Изд-во ГГУ, 1989 (40).
2. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).
3. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
4. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
5. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (70).

Указанные пособия содержат теоретический материал с иллюстрирующими подробными примерами и упражнениями для самостоятельного выполнения, а также примеры программ на языке MATLAB и задания для выполнения лабораторных работ.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

## 5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

### 5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала.  Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минималь-	При решении стандартных	Продемонстрированы	Продемонстрированы все	Продемонстрированы все	Продемонстрированы	Продемонстрированы

	ных умений . Невозмож- ность оце- нить наличие умений вследствие отказа обу- чающегося от ответа	задач не про- демонстри- рованы ос- новные уме- ния.  Имели место грубые ошибки.	основные умения. Ре- шены типо- вые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания но не в пол- ном объеме.	основные уме- ния. Решены все основные задачи с негру- быми ошибка- ми. Выполне- ны все задания, в полном объ- еме, но неко- торые с недо- четами.	основные уме- ния. Решены все основные задачи . Вы- полнены все задания, в пол- ном объеме, но некоторые с недочетами.	все основные умения, ре- шены все основные задачи с от- дельными несущест- венным недочетами, выполнены все задания в полном объ- еме.	все основные умения,. Ре- шены все основные задачи. Вы- полнены все задания, в полном  объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозмож- ность оце- нить наличие навыков вследствие отказа обу- чающегося от ответа	При решении стандартных задач не про- демонстри- рованы базо- вые навыки.  Имели место грубые ошибки.	Имеется ми- нимальный  набор нав- ков для ре- шения стан- дартных за- дач с некото- рыми недо- четами	Продемон- стрированы базовые нав- ки  при решении стандартных задач с некото- рыми недоче- тами	Продемон- стрированы базовые нав- ки  при решении стандартных задач без оши- бок и недоче- тов.	Продемон- стрированы навыки  при решении нестандарт- ных задач без ошибок и недочетов.	Продемон- стрирован творческий подход к решению нестандарт- ных задач

### Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне



не за- чтено		«плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

## 5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

### 5.2.1. Контрольные вопросы

Вопрос	Код формируемой компетенции
1. Определение и простейшие свойства выпуклых множеств.	ОПК-1, ОПК-2
2. Граничные точки выпуклых множеств.	ОПК-1, ОПК-2
3. Проекция точки на множество. Теоремы о проекции.	ОПК-1, ОПК-2
4. Неотрицательная и выпуклая комбинации точек.	ОПК-1, ОПК-2
5. Коническая и выпуклая оболочки множества.	ОПК-1, ОПК-2
6. Теоремы отделимости выпуклых множеств.	ОПК-1, ОПК-2
7. Опорные гиперплоскости.	ОПК-1, ОПК-2
8. Сопряженный конус. Теорема Фаркаша.	ОПК-1, ОПК-2
9. Возможные (допустимые) направления.	ОПК-1, ОПК-2
10. Определение выпуклой функции и его геометрический смысл. Простейшие свойства выпуклых функций.	ОПК-1, ОПК-2
11. Дифференцируемость выпуклой функции по возможным направлениям.	ОПК-1, ОПК-2
12. Свойство непрерывности выпуклой функции.	ОПК-1, ОПК-2
13. Критерии выпуклости в классе дифференцируемых функций нескольких переменных.	ОПК-1, ОПК-2
14. Критерий выпуклости в классе дважды дифференцируемых функций многих переменных.	ОПК-1, ОПК-2
15. Точки минимума выпуклых функций. Критерий точки минимума выпуклой функции.	ОПК-1, ОПК-2
16. Сильно выпуклые функции.	ОПК-1, ОПК-2
17. Понятие о математической теории оптимизации и математическом программировании (МП) как одном из ее разделов. Примеры задач оптимизации.	ОПК-1, ОПК-2
18. Теорема Вейерштрасса и ее следствия.	ОПК-1, ОПК-2
19. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Необходимые условия первого порядка.	ОПК-1, ОПК-2
20. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Необходимые условия второго порядка.	ОПК-1, ОПК-2

21. Гладкие задачи на безусловный экстремум. Достаточные условия второго порядка.	ОПК-1, ОПК-2
22. Направления спуска. Необходимое условие оптимальности в общей задаче минимизации. Необходимое и достаточное условия направления спуска для дифференцируемых функций.	ОПК-1, ОПК-2
23. Гладкие задачи на условный экстремум. Необходимое условие оптимальности первого порядка.	ОПК-1, ОПК-2
24. Гладкие задачи на условный экстремум. Необходимое условие оптимальности в классе дважды дифференцируемых функций.	ОПК-1, ОПК-2
25. Гладкие задачи на условный экстремум. Достаточное условие оптимальности в классе дважды дифференцируемых функций	ОПК-1, ОПК-2
26. Классификация задач математического программирования.	ОПК-1, ОПК-2
27. Принцип Лагранжа и его геометрический смысл.	ОПК-1, ОПК-2
28. Достаточное условие глобального минимума в задаче выпуклого программирования.	ОПК-1, ОПК-2
29. Простейшее условие регулярности в задаче математического программирования.	ОПК-1, ОПК-2
30. Достаточные условия регулярности в задаче математического программирования: условие Слейтера.	ОПК-1, ОПК-2
31. Достаточные условия регулярности в задаче математического программирования: условие линейности.	ОПК-1, ОПК-2
32. Необходимые условия второго порядка в задаче математического программирования.	ОПК-1, ОПК-2
33. Достаточные условия второго порядка в задаче математического программирования	ОПК-1, ОПК-2
34. Выпуклое программирование. Теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме.	ОПК-1, ОПК-2
35. Понятие седловой точки функции Лагранжа. Критерий седловой точки.	ОПК-1, ОПК-2
36. Теорема Куна-Таккера в форме утверждения о седловой точке. Связь с теоремой Куна-Таккера в дифференциальной форме.	ОПК-1, ОПК-2
37. Понятие двойственной задачи и ее свойства.	ОПК-1, ОПК-2
38. Теорема двойственности.	ОПК-1, ОПК-2
39. Теорема Куна-Таккера в форме двойственности.	ОПК-1, ОПК-2
40. Теорема существования решения в задачах ЛП.	ОПК-1, ОПК-2
41. Теория двойственности для задач ЛП	ОПК-1, ОПК-2

42. Классификация численных методов оптимизации.	ОПК-1, ОПК-2
43. Метод дихотомии.	ОПК-1, ОПК-2
44. Метод половинного деления.	ОПК-1, ОПК-2
45. Метод золотого сечения.	ОПК-1, ОПК-2
46. Безусловная минимизация функций многих переменных: овражный эффект.	ОПК-1, ОПК-2
47. Безусловная минимизация функций многих переменных: метод наискорейшего спуска. Теорема о сходимости.	ОПК-1, ОПК-2
48. Безусловная минимизация функций многих переменных: метод Ньютона: идея, алгоритм, достоинства и недостатки, сравнение с градиентными методами.	ОПК-1, ОПК-2
49. Условная минимизация функций многих переменных: метод проекции градиента. Теорема о сходимости.	ОПК-1, ОПК-2
50. Условная минимизация функций многих переменных: метод условного градиента. Теорема о сходимости.	ОПК-1, ОПК-2
51. Условная минимизация функций многих переменных: метод квадратичного штрафа.	ОПК-1, ОПК-2
52. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: каноническая задача ЛП. Приведение задач ЛП к каноническому виду.	ОПК-1, ОПК-2
53. Основные определения симплекс-метода: вершина, ребро, базис вершины. Соответствие между вершинами и базисами. Ребра, выходящие из невырожденной вершины.	ОПК-1, ОПК-2
54. Итерационный алгоритм симплекс-метода в невырожденном случае. Итерационные формулы. Симплекс-таблица (СТ). Анализ и пересчет СТ.	ОПК-1, ОПК-2
55. Симплекс-метод решения задач линейного программирования: отыскание начальной вершины методом искусственного базиса	ОПК-1, ОПК-2
56. Простейшая задача вариационного исчисления. Классификация экстремумов. Экстремали функционала и экстремали задачи.	ОПК-1, ОПК-2
57. Основные леммы вариационного исчисления.	ОПК-1, ОПК-2
58. Необходимые условия слабого локального экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.	ОПК-1, ОПК-2
59. Задача о брахистохроне.	ОПК-1, ОПК-2
60. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.	ОПК-1, ОПК-2
61. Задачи вариационного исчисления с вектор-функциями. Система уравнений Эйлера.	ОПК-1, ОПК-2
62. Задачи вариационного исчисления с функциями нескольких переменных. Уравнение Эйлера-Остроградского.	ОПК-1, ОПК-2
63. Принцип Гамильтона-Остроградского	ОПК-1, ОПК-2
64. Изопериметрические задачи: постановка, принцип Лагранжа, условия регулярности.	ОПК-1, ОПК-2

65. Задача Дидоны	ОПК-1, ОПК-2
66. Задача Лагранжа	ОПК-1, ОПК-2
67. Задача оптимального управления классического типа. Необходимые условия оптимальности	ОПК-1, ОПК-2
68. Задача оптимального управления понтрягинского типа. Принцип максимума Л.С.Понтрягина	ОПК-1, ОПК-2

### 5.2.2. Типовые тестовые задания для оценки сформированности компетенции

#### Вариант 1

Задача 1. Проверить на выпуклость функцию  $f(x) = (x_1)^2 - x_1x_2 + (x_2)^2$  на множестве  $X = R^2$ .

Задача 2. Существует ли точка глобального минимума в задаче оптимизации:  $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ ? Почему?

Задача 3. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации:  $f(x, y) = 5x - 3y \rightarrow \min$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Задача 4. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2x - y + 3z \rightarrow \min \\ x + 3y - 2z \leq 2, & 2x - y + z = 4, \\ y, z \geq 0. \end{cases}$$

Задача 5. Решить задачу  $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$  методом Ньютона, начав с точки (1,1).

Задача 6. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 2xy] dx \rightarrow \min, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

### 5.2.3. Типовые задачи для оценки сформированности компетенции

#### Вариант 1 (Выпуклый анализ)

Задание 1. Проверить на выпуклость множество  $X = \Gamma_{c,\alpha}$ .

Задание 2. Проверить на выпуклость функцию  $f(x) = 3(x^1)^2 - x^1x^2 + (x^2)^2$ .

#### Вариант 2 (Общая задача оптимизации)

Задание 1. Для задачи  $f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min$ ,  $(x^1)^2 + x^2 \leq 1$ ,  $x^2 \geq 0$ , построить допустимое множество и линии уровня целевой функции; указать точку глобального минимума (если она существует). Выполняются ли какие-то достаточные условия существования глобального минимума в этой задаче?

Задание 2. Решить задачу безусловной минимизации:  $f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Вариант 3 (Гладкие задачи математического программирования)

Задание 1. Решить с помощью метода множителей Лагранжа задачу оптимизации:

$$f(x) = x^1 + x^2 \rightarrow \min, (x^1)^2 + x^2 \leq 1, x^2 \geq 0.$$

Задание 2. Решить с помощью теоремы Куна-Таккера в дифференциальной форме задачу оптимизации:

$$f(x) = 0.5(Ax, x) - (b, x) + c \rightarrow \min, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x^1 + x^2 = 1, x^1, x^2 \geq 0.$$

#### Вариант 4 (Выпуклое и линейное программирование)

Задание 1. Решить задачу линейного программирования с помощью теории двойственности:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 2y - x + 3z \rightarrow \min \\ 3x + y - 2z \leq 2, & 2y - x + z = 4, \\ x, z \geq 0. \end{cases}$$

Задание 2. Решить ту же задачу с помощью теоремы Куна-Таккера в форме утверждения о седловой точке.

#### Вариант 5 (Численные методы оптимизации)

Задание 1. Решить задачу  $f(x, y) = x^2 + 4y^2 \rightarrow \min$  методом Ньютона, начав с точки  $(1, -1)$ .

Задание 2. Решить симплекс-методом задачу линейного программирования:  $f(x) = (c, x) \rightarrow \min$ ,

$$Ax = b, x \geq 0, A = \begin{pmatrix} 2, 1, 1, 0 \\ 1, 3, 0, 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c = (1, -2, 2, 3).$$

#### Вариант 6 (Вариационное исчисление)

Задание 1. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J[y] = \int_0^1 [2(y')^2 - 3y] dx \rightarrow \min, y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Задание 2. Найти экстремали изопериметрической задачи:

$$J[y] = \int_0^\pi [(y')^2] dx \rightarrow \min, y(0) = 1, y(\pi) = -1, K[y] = \int_0^\pi [y \cos x] dx = \frac{\pi}{2}.$$

### 6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### а) основная литература:

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988 (215).
2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука. 1984 (160).

#### б) дополнительная литература:

1. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука. 1986 (4).
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983 (14).

#### в) учебно-методическая литература, имеющаяся на кафедре прикладной математики для выдачи студентам

1. Сумин В.И. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методическая разработка по курсу "Методы оптимизации". - Горький: Изд-во ГГУ, 1989 (40).
2. Чернов А.В. Применение системы MATLAB к решению простейшей задачи вариационного исчисления. Н.Новгород: ННГУ, 2007 (85).

3. Чернов А.В. Численные методы одномерной минимизации. Н.Новгород: ННГУ, 2009 (62).
4. Чернов А.В. Численные методы безусловной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (52).
5. Чернов А.В. Численные методы условной минимизации функций многих переменных. Н.Новгород: ННГУ, 2010 (70).

**г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

Фонд электронных изданий ННГУ. Режим доступа:  
<http://www.unn.ru/books/resources.html>

1. Сумин В.И. Начала математического программирования. Теорема Вейерштрасса. Безусловный экстремум. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 40 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 973.15.06).
2. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 1. Выпуклые множества. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 32 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 974.15.06).
3. Сумин В.И. Начала выпуклого анализа. Часть 2. Выпуклые функции. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 28 с. (<http://www.unn.ru/books/resources.html>, Регистрационный номер 975.15.06).

**7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой (лекционного и семинарского типа), оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики  
от 2 июня 2021 года, протокол № 8.

Автор (ы) к.ф.-м.н., доц. \_\_\_\_\_ А.В.Чернов

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ М.В. Иванченко