

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования**
**«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.
Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
(протокол от 16.06.2021 г. №8)

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Дискретная математика и
математическая логика

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки / специальность
01.03.01 Математика

Направленность образовательной программы
Общий профиль

Квалификация (степень)
бакалавр

Форма обучения
очная

Нижегород
2018 год

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Дискретная математика и математическая логика» относится к базовой части ОПОП бакалавриата по направлению подготовки «Математика». Обязательна для освоения в первом и седьмом семестрах (Б1.Б.11 – базовая часть).

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) базовая часть	Дисциплина <i>Б1.Б.11, Дискретная математика и математическая логика</i> относится к базовой части ОПОП направления подготовки 01.03.01. Математика

Целями освоения дисциплины являются:

- ознакомление студентов с фундаментальными структурами, понятиями и методами дискретной математики; овладение математическим аппаратом, необходимым для построения и изучения моделей информационных и управляющих систем; подготовка базы для изучения дисциплин, использующих понятия дискретной математики;
- ознакомление студентов с понятиями и фактами, являющимися основой современной математической логики и играющими важную роль в ее приложениях;
- приобретение навыков математического моделирования различных процессов и закономерностей реального мира.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций
ОПК-1: готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	31 (ОПК-1) Знать основные понятия и важнейшие факты из комбинаторики, теории графов, пропозициональной логики 32 (ОПК-1) Знать синтаксис и семантику логики первого порядка, исчисления Гильберта и Генцена для логики первого порядка 33 (ОПК-1) Знать определение и факты о машине Тьюринга
Начальный, завершающий этапы	

ОПК-3: способность к самостоятельной научно-исследовательской работе Начальный, завершающий этапы	В1 (ОПК-3) Владеть навыками самостоятельного изучения научной литературы У1 (ОПК-3) Уметь решать типовые комбинаторные задачи, простейшие задачи анализа графов, выполнять преобразования между различными формами представления дискретных объектов.
ПК-2: способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики. Начальный, завершающий этапы	31 (ПК-2) Знать теоремы Гёделя о полноте и неполноте 32 (ПК-2) Знать теоремы о разрешимости отдельных теорий и неразрешимости логики первого порядка В1 (ПК-2) Владеть: методами построения и преобразования различных представлений дискретных объектов.

3. Структура и содержание дисциплины «Дискретная математика, математическая логика и их приложения в информатике и компьютерных науках»

Объем дисциплины составляет 7 зачетных единицы, всего 252 ч., из которых 116 ч. составляет контактная работа обучающегося с преподавателем (48 ч. занятий лекционного типа и 64 ч. занятий семинарского типа, 4 часа промежуточной аттестации), 136 ч. составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. 72 часа подготовки к экзамену).

Содержание дисциплины

	Лекции	Практика	Самостоятельная работа	Всего
I семестр				
Множества. Понятие множества. Конечные и бесконечные множества. Мощность конечного множества. Подмножество. Число подмножеств конечного множества. Характеристический вектор. Объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическая разность множеств. Основные тождества в алгебре множеств. Диаграмма Венна. Декартово произведение множеств. Мультимножества.	2	4	10	16
Отношения. Бинарное отношение на множестве. Граф отношения. Свойства отношений. Отношение эквивалентности. Разбиение множества. Теорема о факторизации. Классы эквивалентности. Отношение порядка. Линейный и частичный порядок. Диаграмма Хассе. Отношения между множествами. Функциональные отношения. Инъекции, сюръекции, биекции. Многочестные отношения.	4	4	10	18

Комбинаторика. Правила равенства, суммы и произведения. Упорядоченные и неупорядоченные наборы с повторениями и без повторений. Перестановки. Правило последовательного выбора. Размещения. Сочетания, бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Упорядоченные разбиения. Сочетания с повторениями. Формула включений-исключений. Линейные рекуррентные уравнения первого и второго порядка.	4	8	10	18
Графы. Понятие графа, типы графов. Смежность, инцидентность, степени. Способы задания графов. Число графов. Специальные графы. Подграф. Изоморфизм. Инварианты. Пути, циклы, связность. Расстояния и метрические характеристики. Эйлеровы циклы и пути. Деревья, основные свойства. Код Прюфера. Двудольные графы. Теорема Кёнига. Планарные графы. Формула Эйлера. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского (без доказательства).	3	7	11	21
Алгебра логики. Основные операции логики высказываний. Формулы. Тавтологическая истинность. Основные тождества. Нормальные формы.	3	9	17	29
В т.ч. текущий контроль		2		2
Промежуточная аттестация: экзамен				
7 семестр				
Элементы логического языка первого порядка	4	4	11	19
Модели формул логического языка первого порядка	4	4	11	19
Логический вывод	6	6	11	23
Канонические формы предложений в логике первого порядка	4	4	11	19
Приближенное выражение свойств структур в логике первого порядка	2	2	11	15
Приложения логического языка первого порядка к моделированию математических теорий	6	6	11	23
Изучение моделей вычислений на примере машины Тьюринга	6	6	12	24
В т.ч. текущий контроль		2		2
Промежуточная аттестация: экзамен				

4. Образовательные технологии.

Используются образовательные технологии в форме лекций и практических занятий. Лекционные занятия в основном проводятся в форме лекции-информации. Ориентирована на изложение и объяснение студентам научной информации, подлежащей осмыслению (на самой лекции, на практических занятиях и в ходе самостоятельной работы) и запоминанию. Практические занятия предполагают разбор решений задач и самостоятельном решении задач, предлагаемых преподавателем, под контролем преподавателя, а также проверке знания теоретического материала, полученного на лекциях.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов состоит в выполнении домашних заданий и контрольных работ, изучении рекомендованной литературы.

Для самостоятельной работы можно использовать материалы, указанные в разделе 7.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования.

ОПК-1

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания	Шкала оценивания
31(ОПК-1) Знать: основные понятия и важнейшие факты из комбинаторики, теории графов, пропозициональной логики. 32 (ОПК-1) Знать синтаксис и семантику логики первого порядка, исчисления Гильберта и Генцена для логики первого порядка 33 (ОПК-1) Знать определение и факты о машине Тьюринга	Полное незнание основных понятий и определений.	Нулевой уровень формирования компетенции. 0-10 баллов «Плохо»
	Незнание значительной части основных определений, формулировок важнейших теорем..	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 11-19 баллов «неудовлетворительно»
	Знание основных определений из теории множеств, комбинаторики, теории графов, теории логических функций.	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов «Удовлетворительно»
	Знание основных понятий теории множеств, теории бинарных отношений, комбинаторики, теории графов, теории логических функций, формулировок важнейших теорем из этих разделов. Умение воспроизводить несложные доказательства с незначительными погрешностями.	Хороший уровень формирования компетенции. 50-69 баллов «Хорошо»
	Уверенное знание основных понятий и формулировок теорем из всех разделов курса. Умение воспроизводить доказательства средней сложности с незначительными погрешностями.	Очень хороший уровень формирования компетенции. 70-85 баллов «Очень хорошо»
	Свободное владение теоретическим материалом. и доказывать любые теоремы из курса.	Отличный уровень формирования компетенции. 86-95 баллов «Отлично»
	Свободное владение теоретическим материалом. Умение решать нестандартные	Превосходный уровень формирования компетенции.

	задачи, требующие комбинирования понятий и фактов из разных разделов курса. Умение применять теоретические знания в нестандартных ситуациях.	96-100 баллов «Превосходно»
--	--	--------------------------------

ОПК-3

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания	Шкала оценивания
В1 (ОПК-3) Владеть навыками самостоятельного изучения научной литературы	Полное отсутствие навыков решения простейших задач.	Нулевой уровень формирования компетенции. 0-10 баллов «Плохо»
	Грубые ошибки при решении стандартных задач.	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 11-19 баллов «неудовлетворительно»
	Умение решать простые задачи: подсчет числа базовых комбинаторных объектов, построение нормальных форм, вычисление метрических характеристик графов и т.п. Владение основными алгоритмами решения стандартных задач, но частые ошибки при их применении.	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов «Удовлетворительно»
	Умение решать задачи средней сложности с незначительными погрешностями. Владение основными алгоритмами.	Хороший уровень формирования компетенции. 50-69 баллов «Хорошо»
	Умение решать задачи повышенной сложности с небольшими погрешностями.	Очень хороший уровень формирования компетенции. 70-85 баллов «Очень хорошо»
	Умение решать задачи повышенной сложности.	Отличный уровень формирования компетенции. 86-95 баллов «Отлично»
	Умение решать нестандартные задачи, требующие комбинирования понятий и фактов из разных разделов курса.	Превосходный уровень формирования компетенции. 96-100 баллов «Превосходно»

ПК-2

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания	Шкала оценивания
<p>31 (ПК-2) Знать теоремы Гёделя о полноте и неполноте</p> <p>32 (ПК-2) Знать теоремы о разрешимости отдельных теорий и неразрешимости логики первого порядка</p> <p>В1 (ПК-2) Владеть: методами построения и преобразования различных представлений дискретных объектов.</p>	<p>Полное отсутствие навыков решения простейших задач.</p>	<p>Нулевой уровень формирования компетенции.</p> <p>0-10 баллов</p> <p>«Плохо»</p>
	<p>Грубые ошибки при решении стандартных задач.</p>	<p>Неудовлетворительный уровень формирования компетенции.</p> <p>11-19 баллов</p> <p>«неудовлетворительно»</p>
	<p>Умение решать простые задачи: подсчет числа базовых комбинаторных объектов, построение нормальных форм, вычисление метрических характеристик графов и т.п. Владение основными алгоритмами решения стандартных задач, но частые ошибки при их применении.</p>	<p>Удовлетворительный уровень формирования компетенции.</p> <p>20-49 баллов</p> <p>«Удовлетворительно»</p>
	<p>Умение решать задачи средней сложности с незначительными погрешностями. Владение основными алгоритмами.</p>	<p>Хороший уровень формирования компетенции.</p> <p>50-69 баллов</p> <p>«Хорошо»</p>
	<p>Умение решать задачи повышенной сложности с небольшими погрешностями.</p>	<p>Очень хороший уровень формирования компетенции.</p> <p>70-85 баллов</p> <p>«Очень хорошо»</p>
	<p>Умение решать задачи повышенной сложности.</p>	<p>Отличный уровень формирования компетенции.</p> <p>86-95 баллов</p> <p>«Отлично»</p>
	<p>Умение решать нестандартные задачи, требующие комбинирования понятий и фактов из разных разделов курса.</p>	<p>Превосходный уровень формирования компетенции.</p> <p>96-100 баллов</p> <p>«Превосходно»</p>

6.2. Описание шкал оценивания

Экзамен

Превосходно	свободное владение материалом, умение воспроизвести сложные доказательства, решать сложные нестандартные задачи
Отлично	свободное владение основным материалом с незначительными погрешностями, умение воспроизвести сложные доказательства, решать задачи повышенной сложности
Очень хорошо	достаточное владение основным материалом с незначительными погрешностями, умение воспроизводить доказательства и решать задачи средней сложности
Хорошо	владение основным материалом с заметными погрешностями, умение воспроизвести простые доказательства, решать стандартные задачи
Удовлетворительно	знание важнейших определений и формулировок, умение решать стандартные задачи
Неудовлетворительно	владение материалом недостаточно, необходима дополнительная подготовка
Плохо	отсутствие владения материалом

6.3. Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения используются тестирование, индивидуальное собеседование, письменные контрольные работы.

6.4. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

Образцы заданий для контрольных работ для проверки уровня ПК-1 (1 семестр)

1. Задано множество $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и в нем подмножества $A = \{x \vee x \leq 4\}$, $B = \{2,4,5,6\}$, $C = \{1,3,5,6\}$. Найти множество $C \cup (A - B)$.
2. Выяснить, является ли равенство $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ тождеством.
3. Решить уравнение $X \cup A = X \cap B$.
4. Даны множество A и его подмножества B и C , причем $A - (B \cup C) \vee 3$, $B \otimes C \vee 5$, $B - C \vee 4$, $B \cup C \vee 7$. Сколько имеется таких подмножеств $X \subseteq A$, что $X \cap B \vee 2$, $X \cap (B \cup C) \vee 3$?
5. Построить диаграмму Хассе отношения включения на семействе множеств $\{\{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$.
6. Найти число слов длины 9 в алфавите $\{a, b, c, d\}$, в которые буква a входит 5 раз, а буква b 1 раз.
7. Решить рекуррентное уравнение $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ с начальными значениями $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

8. Вершинами графа являются сочетания из четырех элементов по два. Две вершины смежны, если соответствующие сочетания имеют общий элемент. Этот граф 1) двудольный?
а. 2) планарный? 3) имеет эйлеров цикл?
9. Вершинами графа являются сочетания из четырех элементов по два. Две вершины смежны, если соответствующие сочетания имеют общий элемент. Найти эксцентриситеты вершин, радиус,
а. диаметр, центр этого графа.
10. Найти число подграфов графа $K_{4,5}$, изоморфных графу P_4 .
11. Восстановить дерево по коду Прюфера (4, 2, 2, 4, 4, 8).
12. Построить СДНФ и СКНФ для функции, заданной формулой $(x_1 \vee x'_2 \vee x'_3)(x_2 \vee x'_3)$.

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Алгебра множеств. Прямое произведение множеств. Число подмножеств конечного множества.
2. Отношение эквивалентности. Теорема о факторизации.
3. Отношение порядка. Теорема о конечных упорядоченных множествах. Диаграмма Хассе. Лексикографический порядок.
4. Перестановки, размещения, сочетания.
5. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Полиномиальная теорема.
6. Сочетания с повторениями (мультимножества).
7. Формула включений-исключений.
8. Число упорядоченных разбиений конечного множества с заданными размерами частей.
9. Линейные рекуррентные уравнения первого и второго порядка.
10. Понятие графа. Число графов. Изоморфизм. Инварианты.
11. Пути и циклы в графах. Связность. Теоремы о существовании цикла и о числе ребер в связном графе.
12. Расстояния в графах. Метрические характеристики графов. Теорема о диаметре и радиусе.
13. Эйлеровы циклы и пути.
14. Деревья, их свойства. Теорема о центре дерева.
15. Двудольные графы. Теорема Кёнига.
16. Планарные графы. Формула Эйлера. Критерий планарности.
17. Логические операции. Основные тождества алгебры логики.
18. Нормальные формы.

Задачи для оценки компетенции ОПК-1 (7 семестр)

1. В структуре $S = (N \cup \{0\}; =; +, *, 0, 1)$ выразите отношение $R(x, y)$ — числа x и y являются взаимно простыми.

2. В структуре $S = (\mathbb{N} \cup \{0\}; =, +, *, 0, 1)$ выразите отношение $P(x)$ — число x является степенью некоторого простого числа.

3. Покажите, что имеет место следующее логическое следствие.

$$\forall x. P_1(x) \rightarrow Q_1(x), \forall x. P_2(x) \rightarrow Q_2(x), \forall x. P_1(x) \vee P_2(x), \neg \exists x. Q_1(x) \wedge Q_2(x) \models (\forall x. Q_1(x) \rightarrow P_1(x)) \wedge (\forall x. Q_2(x) \rightarrow P_2(x))$$

4. Покажите, что формула $(\forall x R(x, x) \wedge \exists y \forall x R(x, y)) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y)$ истинна во всех интерпретациях с носителем не более, чем из двух элементов, но не является общезначимой.

5. Выясните, является ли следующее предложение теоремой теории плотного линейного порядка без конечных точек.

$$\exists z \forall y \exists x [[\neg R(z, y) \vee R(y, x)] \& [\neg R(z, x) \vee R(x, y)]].$$

Вопросы к экзамену (7 семестр)

1. Синтаксис логического языка первого порядка: алфавит, переменные, термы и формулы. Понятие подформулы, области действия квантора, связанной и свободной переменной, предложения.
2. Понятие интерпретации формул логического языка первого порядка. Определение истинностного значения формул.
3. Логическое следствие, равносильность формул. Основные равносильности.
4. Доказательства индукцией по термам и формулам, примеры.
5. Изоморфизм интерпретаций. Использование автоморфизма для доказательства невыразимости отношений.
6. Канонические формы предложений в логике первого порядка. Предваренные нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к префиксному виду, примеры.
7. Сколемовские нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к сколемовской нормальной форме.
8. Эрбрановские нормальные формы. Алгоритм приведения любой формулы к эрбрановской нормальной форме.
9. Теорема Эрбрана.
10. Подстановка терма в формулу. Терм, свободный для подстановки. Лемма о подстановке.
11. Логический вывод. Основные и допустимые правила вывода.
12. Логический вывод. Теорема о корректности.
13. Логический вывод. Лемма о максимальное непротиворечивом множестве.
14. Логический вывод. Теорема о полноте.

15. Теории с равенством. Теоремы о корректности и полноте для теорий с равенством.
16. Теорема о компактности. Свойства интерпретаций, невыразимые в логике первого порядка.
17. Теорема Левенгейма–Сколема.
18. Свойства элементарных теорий: полнота, алгоритмическая разрешимость.
19. Метод элиминации кванторов для теории плотного линейного порядка без конечных точек.
20. Консервативные и неконсервативные расширения теорий, примеры. Явные определения новых функциональных и предикатных символов.
21. Модели вычислений, машина Тьюринга.
22. Вычислимость и разрешимость: понятия словарных функций и словарных отношений, полурешимые и разрешимые отношения, вычислимые функции.
23. Понятие частично-рекурсивных функций. Тезис Черча
24. Понятия разрешимых отношений и вычислимых функций. Примеры невычислимой по Тьюрингу функции и алгоритмически неразрешимого отношения.
25. Измерение алгоритмической сложности задач: временная и пространственная сложность алгоритмов, расшифровка этих понятий на примере тьюринговых программ. Верхняя и нижняя оценки временной сложности.
26. Классы P и NP. Примеры задач из этих классов. Полиномиальная сводимость одной задачи к другой, NP-полные и NP-трудные задачи, пример.

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014. http://www.unn.ru/site/images/docs/obrazov-org/Formi_stroki_kontrolya_13.02.2014.pdf

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с. 137 экз.
2. Алексеев В.Е., Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Сборник задач по дискретной математике. — Н. Новгород: ННГУ, 2012. Рег. № 487.12.08.
http://www.unn.ru/books/met_files/alekseev.pdf
3. Таланов В.А. Математическая логика и модели вычислений: учебное пособие. — Н. Новгород: ННГУ, 1994. — 115 с. 52 экз.

б) Дополнительная литература

1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977. — 368 с. 150 экз.
2. Киселева Л.Г., Смирнова Т.Г. Функции алгебры логики в примерах и задачах. Н. Новгород: ННГУ, 2017.

<http://www.unn.ru/books/resources.html> рег № 1434.17.14.

3. Жильцова Л.П., Смирнова Т.Г. Основы теории графов и теории кодирования в примерах и задачах. Н. Новгород: ННГУ, 2017.

<http://www.unn.ru/books/resources.html> рег № 1437.17.06.

4. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. — СПб.: Лань, 2009. — 400 с. 11 экз.
<https://e.lanbook.com/book/220>

5. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М. : Наука, 1976, 1984. 91 экз.

6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1975. — 240 с. 58 экз.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет»".

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению 01.03.01 «Математика».

Авторы: д.ф.-м.н., доц. _____ Алексеев В.Е.

к.ф.-м.н., ст. преп. _____ Макаров Е.М.

Рецензент (ы) _____

Зав кафедрой, д.ф.м.н., проф. _____ Кузнецов М.И.

Программа одобрена на заседании методической комиссии института Информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского от _____ г.,
протокол № _____.