

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета ННГУ
протокол от
31.05.2023 г. №6

Рабочая программа дисциплины

Практикум по математическому анализу

Уровень высшего образования
бакалавриат

Направление подготовки
090303 Прикладная информатика

Направленность образовательной программы
Проектирование и автоматизация производства изделий микроэлектроники

Квалификация (степень)
Бакалавр

Форма обучения
очная

Нижегород
2021

1. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина относится к обязательной части.

№ варианта	Место дисциплины в учебном плане образовательной программы	Стандартный текст для автоматического заполнения в конструкторе РПД
1	Блок 1. Дисциплины (модули) Обязательная часть	Дисциплина Б1.О.23 «Практикум по математическому анализу» относится к обязательной части ООП направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции (код, содержание компетенции)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции* (код, содержание индикатора)	Результаты обучения по дисциплине**	
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Демонстрирует знание основ высшей математики, физики, вычислительной техники и программирования.	Уметь решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным: 1. раскрывать неопределенности и вычислять пределы последовательностей и функций (с помощью замечательных пределов, эквивалентных бесконечно малых, правила Лопиталя); 2. исследовать функцию на непрерывность и дифференцируемость; 3. дифференцировать явно и неявно заданные функции; 4. дифференцировать параметрически заданные функции; 5. исследовать функцию с помощью производных и строить графики; 6. находить локальные и глобальные экстремумы функций; 7. находить условные экстремумы функций; 8. раскладывать функции по формуле Тейлора; 9. интегрировать функции; 10. представить функцию в виде степенного ряда и ряда Фурье; 11. находить длины кривых, площади плоских фигур, объемы и	задания к зачету, контрольные работы

		<i>массы тел, площади поверхностей, координаты центра масс.</i>	
	ОПК-1.2. <i>Демонстрирует умение решать профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.</i>	<i>Знать понятия и утверждения, основные методы и приемы дисциплины «Математический анализ»</i>	
	ОПК-1.3. <i>Демонстрирует наличие практического опыта теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.</i>	<i>Владеть навыком взятия производных, исследовать на экстремум функции одной и многих переменных, применять определенный интеграл к решению геометрических и физических задач, выбирать наиболее подходящий прием или метод для решения практической задачи.</i>	

Текущий контроль успеваемости реализуется в форме опросов на занятиях семинарского типа. Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

3. Структура и содержание дисциплины

3.1. Трудоемкость дисциплины

	Очная форма обучения
Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану	144
в том числе	
аудиторные занятия (контактная работа):	130
- занятия лекционного типа	0
- занятия семинарского типа	128
- занятия лабораторного типа	
- текущий контроль (КСР)	2
самостоятельная работа	14
Промежуточная аттестация – зачет	0

3.2. Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе	
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них	Самостоятельная работа студента

		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	
Семестр 1						
Введение 1.Предмет математического анализа. Очерк истории развития математического анализа. Математическая символика, обозначения	4	0	4		4	
2.Вещественные числа Числовая прямая. Числовые множества: промежутки, интервалы, лучи. Окрестность точки. Элементы теории множеств. Ограниченные и неограниченные множества, грани множества. Существование точных граней ограниченных числовых множеств. Счетные и несчетные множества. Несчетность множества действительных чисел	6	0	6		6	
3.Числовые последовательности: Определение числовой последовательности. Сходимость и предел числовой последовательности. Примеры. Свойства пределов и числовых последовательностей. Теорема о единственности предела, теорема об ограниченности сходящейся последовательности, предельный переход в неравенствах, арифметические действия со сходящимися последовательностями. Бесконечно малые и большие последовательности, связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей. Предел монотонной последовательности. Число e . Принцип вложенных отрезков. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Предельные точки числового множества. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши существования предела. Полнота числовой прямой.	11	0	10		10	1
4.Предел функции. Функции действительного переменного. Область определения, множество значений. Способы задания функций. График функции. Определение предела функции в точке по Гейне и Коши. Теорема эквивалентности определений. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Свойства пределов функций. Предел суперпозиции функции. Бесконечно малые функции и их сравнение. Замечательные пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ Раскрытие неопределенностей. Обобщение понятия предела: односторонние пределы, бесконечно большие функции, пределы на бесконечности. Критерий Коши существования конечного предела	11	0	10		10	1

функции в точке и на бесконечности.						
5.Непрерывные функции: Свойства непрерывных функций. Локальная устойчивость знака. Различия определения непрерывности функции в точке. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции функции. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность функции на множестве. Непрерывность элементарных функций. Теорема о промежуточных значениях. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке и достижении точных граней. Условия непрерывности монотонной функции на отрезке. Теорема о непрерывности обратной функции.	11	0	10		10	1
6.Производная функции: Задачи, приводящие к понятию производной функции. Средняя и мгновенная скорость изменения процесса. Производная и дифференциал функции в точке. Дифференцируемость функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная к графику функции в точке. Свойства производных и дифференциалов функций. Производная суперпозиции и обратной функции. Таблица производных. Дифференцируемость элементарных функций. Функции и кривые на плоскости, заданные параметрически. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой, заданной параметрически. Инвариантность формы первого дифференциала. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям значений функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница. Неинвариантность формы дифференциалов высшего порядка.	14	0	12		12	2
7.Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения: Локальный экстремум функции. Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем. Формулы конечных приращений. Формула Тейлора. Различные представления остаточного члена формулы Тейлора. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций. Правило Лопиталю раскрытия неопределенностей. Условие монотонности функции. Достаточные условия локального экстремума. Направления выпуклости, вогнутости функции. Точки перегиба. Достаточное условие перегиба. Асимптоты функции. Общая схема	14	0	12		12	2

исследования и построения графиков функции. Нахождение глобального экстремума функции. Приближенные методы нахождения корней уравнений. Метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательной, оценка погрешности.						
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация – экзамен/зачет	0					
Итого	72	0	64		65	7
Семестр 2						
Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего контактных часов	СРС
1.Неопределенный интеграл: Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства интеграла. Таблица интегралов. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Рациональные и дробно-рациональные функции. Разложение правильной дробно-рациональной функции в сумму простейших дробей. Интегрирование простейших дробей. Метод неопределенных коэффициентов. Рационализация подынтегральной функции. Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Теорема Чебышева.	22	0	10		10	1
2.Определенный интеграл: Задачи о площади подграфика функции, о работе переменной силы, о массе неоднородного стержня. Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл. Интегрируемость и ограниченность функции. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости. Колебание функции на отрезке. Определение равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора. Классы интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла и интегрируемых функций. Теорема о среднем. Интеграл как функция верхнего предела. Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интервале.	22	0	10		10	1
3.Приложения определенного интеграла Спрямоугольность кривой, вычисление длины дуги в различных координатах . Квадрируемость плоских фигур, Критерий	16	0	8		8	1

<p>квадрируемости. Множества нулевой площади. Свойство аддитивности площади. Формулы площади областей, граница которых задана в различных координатах.</p> <p>Кубируемость тел. Критерий кубируемости тела. Аддитивность объема. Вычисление объема тела по известным площадям сечений. Объем тела вращения.</p> <p>Вычисление площади поверхности вращения. Общая схема применения интеграла Римана к вычислению геометрических, механических и физических величин. Вычисление работы переменной силы, массы неоднородной материальной кривой и пластины, статических моментов и моментов инерции неоднородной кривой и материальной пластины относительно координатных осей. Вычисление координат центра масс неоднородной кривой и материальной пластины.</p> <p>Теоремы Приближенное вычисление интегралов Римана: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Оценка погрешности.</p>						
<p>4.Функции многих переменных и пределы:</p> <p>Арифметическое Евклидово пространство R. Связное множество в R. Шаровая и кубическая окрестности точки. Открытые и замкнутые множества в R. 11^{\wedge}.Последовательность в R. Сходимость и предел последовательности. Покоординатная сходимость. Критерий Коши сходимости последовательности в R.</p> <p>Ограниченные и неограниченные множества в R Теорема Больцано-Вейерштрасса.</p> <p>Компакты. Критерий компактности.</p> <p>Функции многих переменных.</p> <p>График функции двух переменных.</p> <p>Линии и поверхности уровня.</p> <p>Кратные и повторные пределы функции. Свойства пределов. Критерий Коши.</p>	18	0	10		10	1
<p>5.Непрерывные функции многих переменных</p> <p>Различные определения непрерывности функции в точке. Непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным. Свойства непрерывных функций.</p> <p>Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции на связном множестве.</p> <p>Свойства функции, непрерывной на компакте: теорема Вейерштрасса об ограниченности и существовании глобальных экстремумов, теорема Кантора о равномерной непрерывности.</p>	16	0	8		8	1
<p>6.Дифференцирование функции многих переменных: Частные производные.</p> <p>Дифференцируемость функции в точке.</p> <p>Дифференциал функции. Достаточное условие дифференцируемости.</p> <p>Линеаризация функций Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала.</p> <p>Абсолютная и относительная погрешность.</p> <p>Дифференцирование сложной функции.</p> <p>Инвариантность формы первого дифференциала.</p> <p>Практические следствия инвариантности.</p> <p>Касательная плоскость и нормаль к поверхности.</p> <p>Геометрический смысл дифференциала.</p>	18	0	10		10	1

Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы высших дифференциалов. Инвариантность при аффинной замене переменных. Формула Тейлора. Оценка остаточного члена и приближенное вычисление функции с помощью формулы Тейлора. Формула Лагранжа конечных приращений						
7.Неявно-заданные функции: Неявно-заданные функции и система неявных функций, одной и многих переменных. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости. Якобиан системы функций. Вычисление старших производных неявных функций. Уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной неявно.	11	0	4		4	0
8.Экстремумы функций многих переменных Необходимое условие локального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа. Глобальные экстремумы функций (безусловные и условные).	12	0	6		6	1
Текущий контроль (КСР)	1				1	
Промежуточная аттестация – экзамен/зачет	0					
Итого	72	0	64		65	7
ИТОГО	144	0	128		130	14

Текущий контроль успеваемости реализуется в формах опросов на занятиях семинарского типа.

Промежуточная аттестация проходит в традиционной форме (зачет).

4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

При выполнении практических работ, при самостоятельной работе и подготовке к зачету студенты имеют доступ к материалам курса, размещенным в системе электронного обучения ННГУ по адресу <http://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=1660>, режим доступа – требует авторизации.

Используются образовательные технологии в форме практических занятий, электронного обучения.

Практические занятия. Одна из форм учебного занятия, направленная на развитие самостоятельности обучающихся и приобретение умений и навыков. Данные учебные занятия углубляют, расширяют, детализируют полученные на лекции знания. Практическое занятие предполагает выполнение студентами по заданию и под руководством преподавателей нескольких домашних практических работ. На практических занятиях выделяется время для проведения презентации и обсуждения проектных работ.

Самостоятельное повторение теоретического материала и решение практических примеров по сборнику задач по дисциплине.

Самостоятельная работа студента при изучении дисциплины «Практикум по математическому анализу» включает выполнение домашних заданий.

Самостоятельная работа заключается в решении практических задач, подготовке ответов на вопросы самоконтроля. Самостоятельная работа может происходить как в читальном зале библиотеки, так и в домашних условиях.

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины приведены в п. 5.2.

5. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), включающий:

5.1. Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Уровень сформированности компетенций (индикатора достижения компетенций)	Шкала оценивания сформированности компетенций						
	плохо	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	очень хорошо	отлично	превосходно
	Не зачтено		Зачтено				
<u>Знания</u>	Отсутствие знаний теоретического материала. Невозможность оценить полноту знаний вследствие отказа обучающегося от ответа	Уровень знаний ниже минимальных требований. Имели место грубые ошибки.	Минимально допустимый уровень знаний. Допущено много негрубых ошибок.	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки. Допущено несколько незначительных ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок.	Уровень знаний в объеме, превышающем программу подготовки.
<u>Умения</u>	Отсутствие минимальных умений. Невозможность оценить наличие умений вследствие отказа обучающегося от ответа	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения. Имели место грубые ошибки.	Продemonстрированы основные умения. Решены типовые задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, но не в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи с негрубыми ошибками. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения. Решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме, но некоторые с недочетами.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными незначительными недочетами, выполнены все задания в полном объеме.	Продemonстрированы все основные умения, решены все основные задачи. Выполнены все задания, в полном объеме без недочетов
<u>Навыки</u>	Отсутствие владения материалом. Невозможность оценить наличие	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных	Продemonстрированы базовые навыки при решении стандартных	Продemonстрированы навыки при решении нестандартных задач без	Продemonстрирован творческий подход к решению нестандартных

	навыков вследствие отказа обучающегося от ответа	навыки. Имели место грубые ошибки.	задач с некоторыми недочетами.	задач с некоторыми недочетами	задач без ошибок и недочетов.	ошибок и недочетов.	ых задач.
--	--	------------------------------------	--------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	---------------------	-----------

Шкала оценки при промежуточной аттестации

Оценка		Уровень подготовки
зачтено	Превосходно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «превосходно»
	Отлично	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «отлично», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «отлично»
	Очень хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «очень хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «очень хорошо»
	Хорошо	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «хорошо», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «хорошо»
	Удовлетворительно	Все компетенции (части компетенций), на формирование которых направлена дисциплина, сформированы на уровне не ниже «удовлетворительно», при этом хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «удовлетворительно»
не зачтено	Неудовлетворительно	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «неудовлетворительно», ни одна из компетенций не сформирована на уровне «плохо»
	Плохо	Хотя бы одна компетенция сформирована на уровне «плохо»

5.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения

5.2.1. Типовые задания/задачи для оценки сформированности компетенции ОПК-1

Контрольная работа для оценки компетенции «ОПК-1»:

Вариант 1

Найти пределы

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5 - 10n^4}{n^3 - n + 4}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-2}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^6 + 8} (\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 + 1})$
- Доказать по определению, что $x_n = \frac{3n^2 + n - 1}{2^n}$ бесконечно малая последовательность.
- Найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \frac{n+2}{2n-1} \cos \frac{\pi n}{2}$
- Пользуясь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности или критерием Коши исследовать на сходимость последовательность $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
- Доказать по определению, что $x_n = \frac{n!}{4^n}$ бесконечно большая последовательность.

Вариант 2

Найти пределы

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(3n-1)^3 + (n+1)^3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{5n+1} \right)^{n^2}$
- Доказать по определению, что $x_n = \frac{(n^3+3) \cos \frac{1}{n}}{3^n}$ бесконечно малая последовательность.
- Найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \frac{n+1}{2n+1} \cos \frac{\pi n}{3}$
- Пользуясь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности или критерием Коши исследовать на сходимость последовательность $x_n = \frac{5}{2^2} + \frac{7}{3^2} + \dots + \frac{2n+3}{(n+1)^2}$
- Доказать по определению, что $x_n = 1 - (-1)^n \sqrt[n]{n}$ бесконечно большая последовательность.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

- ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 648 с. — (Курс высшей математики и математической физики).
<https://e.lanbook.com/book/2180#authors>
- ИЛЬИН В. А., ПОЗНЯК Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II: Учеб.: Для вузов. - 4-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 464 с. — (Курс высшей математики и математической физики). (Вып. 2)
<https://e.lanbook.com/book/2180#authors>
- КУДРЯВЦЕВ Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. Учебник. - 3-е изд., перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 400 с.
<https://e.lanbook.com/book/2224#authors>
- КУДРЯВЦЕВ Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 424 с.
<https://e.lanbook.com/book/2224#authors>
- Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.
Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения
https://e.lanbook.com/reader/book/537/#book_name

б) дополнительная литература:

- НИКОЛЬСКИЙ С.М. Курс математического анализа. В 2-х томах. Наука, 1983. Т.1 464 с.; Т.2 448 с.
<https://e.lanbook.com/book/2270#authors>

2. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах). - М.: Физматлит, 2003. т.1 - 680с.; т.2 - 864с.; т.3 - 728с.
<https://e.lanbook.com/book/409#authors>

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы <http://www.unn.ru/books/resources.html>
<http://new.e-vmk.unn.ru/sites/>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения представляют собой учебные аудитории для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, оснащенные оборудованием и техническими средствами обучения:

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечены доступом в электронную информационно-образовательную среду.
Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ 09.03.03 «Прикладная информатика».

Автор (ы) ст. преподаватель Фокина В.Н.

Рецензент (ы)

Заведующий кафедрой А.В.Калинин

Программа одобрена на заседании методической комиссии института информационных технологий, математики и механики

31.05.2023 г. протокол №7