

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики
(факультет / институт / филиал)

УТВЕРЖДАЮ:

Директор _____

Гергель В.П.

«_____» _____ 2017 г.

Рабочая программа дисциплины

Эргодическая теория

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направление подготовки

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы

Общий профиль

Квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Нижний Новгород

2017 год

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Эргодическая теория» относится к Дисциплинам по выбору государственного образовательного стандарта по направлению **02.03.01 Математика и компьютерные науки** и преподается в 8 семестре для бакалавров очной формы обучения. Индекс дисциплины Б1.В.ДВ.09.01

При освоении данной дисциплины студенту необходимы базовые знания по математическому анализу, дифференциальной геометрии и топологии, фундаментальной и компьютерной алгебре.

Цель освоения дисциплины

Содержание дисциплины «Эргодическая теория» направлено на ознакомление студентов, специализирующихся в области математики, с актуальным направлением в теории динамических систем, которое связывает динамические и вероятностные подходы при исследовании сложного поведения траекторий. Основное внимание уделяется современным методам эргодической теории, таким как энтропийная теория, конструкции инвариантных мер, марковские разбиения и меры и др.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
<i>ОК-7- способность к самоорганизации и к самообразованию</i> Завершающий этап	ЗНАТЬ З1(ОК-7) как решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным: З2(ОК-7) как анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления. УМЕТЬ У1(ОК-7) анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления. ВЛАДЕТЬ В1(ОК-7) способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.
<i>ОПК-1</i> готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной	ЗНАТЬ З1(ОПК-1) основные определения и формулировки теорем, излагаемые в настоящем курсе. УМЕТЬ У1(ОПК-1) применять полученные знания при исследовании конкретных динамических систем. ВЛАДЕТЬ В1(ОПК-1) методами конструирования математических моделей рассматриваемых прикладных задач, и делать заключение о характере реального процесса на основе анализа.

математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности. Завершающий этап	
ПК-1 способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области Завершающий этап	ЗНАТЬ З1 (ПК-1) принципы определения общих форм и закономерностей эргодической теории УМЕТЬ У1 (ПК-1) определять общие формы и закономерности в области эргодической теории ВЛАДЕТЬ В1 (ПК-1) опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории

3. Структура и содержание дисциплины «Эргодическая теория»

Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, всего 108 часов, из которых

50 часов составляет **контактная работа** обучающегося с преподавателем:

24 часа занятия лекционного типа,

24 часа практические занятия,

2 часа мероприятия промежуточной аттестации;

58 часов составляет самостоятельная работа обучающегося (в т.ч. включая 36 часов подготовки к экзамену).

Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе					
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы					Самостоятельная работа обучающегося, часы
		из них					
		Занятия лекционного типа	Практические занятия	Лабораторные работы	Консультации индивидуальные	Всего контактных часов	
Введение.	10	2	2			4	6
Символическая динамика	25	6	6			12	13
Энтропийная теория	21	4	4			8	13

дискретных динамических систем							
Классические теоремы эргодической теории.	25	6	6			12	13
Эргодическая теория одномерных отображений	25	6	6			12	13
Промежуточная аттестация: экзамен							
В т.ч. текущий контроль	2						

Содержание дисциплины Эргодическая теория

I. Введение

1. Исторический обзор эргодической теории. Динамическая система как действие группы на фазовом пространстве. Потоки и каскады, динамические системы с более общей группой преобразований.
2. Измеримое пространство и сохраняющие меру преобразования на нем. Примеры динамических систем в эргодической теории.

II. Символическая динамика .

1. Схема применения символической динамики в конкретных динамических системах. Пространство символических последовательностей и его свойства. Отображение сдвига на пространстве односторонних и двусторонних символических последовательностей (сдвиги Бернулли).
2. Топологические марковские цепи и их свойства. Разложимые и неразложимые топологические марковские цепи, периодические и ациклические цепи. Примеры.
3. Теорема Перрона-Фробениуса.
4. Применение теоремы Перрона-Фробениуса для подсчета асимптотики периодических точек. Динамическая дзета-функция Артина-Мазура.

III. Энтропийная теория дискретных динамических систем

1. Определение топологической энтропии непрерывного отображения компакта при помощи открытых покрытий (по Адлеру-Конхейму-МакЭндрю). Основные свойства топологической энтропии.
2. Топологическая энтропия как инвариант топологической сопряженности. Образующие покрытия и их применение для вычисления топологической энтропии.
3. Примеры вычисления топологической энтропии для топологических Марковских цепей и одномерных отображений.
4. Определение топологической энтропии при помощи разделенных и стягивающих подмножеств (по Боуэну). Эквивалентность различных определений.
5. Метрическая энтропия и её свойства. Вариационный принцип. Мера с максимальной энтропией.

IV. Классические теоремы эргодической теории

1. Теорема Пуанкаре о возвращении и её обобщения.

2. Теорема Крылова-Боголюбова о существовании и построении инвариантной меры. Строго эргодические динамические системы.
3. Эргодические меры и преобразования. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина и её приложения.
4. Свойства сильного и слабого перемешивания. Примеры.

V. Эргодическая теория для одномерных необратимых отображений

1. Кусочно-монотонные отображения: символическая динамика и существование инвариантных мер.
2. Инвариантные меры, абсолютно непрерывные по отношению к мере Лебега.
3. Кусочно-монотонные отображения постоянного наклона.

4. Образовательные технологии

Основной формой обучения является лекционные, семинарские занятия и консультации. При самостоятельной работе и подготовке к зачету студенты имеют доступ к авторскому электронному курсу «Эргодическая теория», размещенному на сайте Нижегородского университета в разделе электронного обучения <http://www.unn.ru/e-learning/>. (Электр. ресурс. Доступ после регистрации по паролю).

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

а. Виды самостоятельной работы студентов

Изучение литературы, выступление на семинарах, подготовку тестированию, подготовку к экзаменам.

б. Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов

Материалы курса лекций «Эргодическая теория» <http://www.unn.ru/e-learning/>

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

6.1 Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Оценка уровня формирования компетенции ОПК-1

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
ЗНАТЬ 31(ОПК-1) основные определения и формулировки теорем, излагаемые в настоящем курсе.	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.	Плохой уровень формирования компетенции. 0-19 баллов - «Плохо»

<p>УМЕТЬ У1(ОПК-1) применять полученные знания при исследовании конкретных динамических систем.</p> <p>ВЛАДЕТЬ В1(ОПК-1) методами конструирования математических моделей рассматриваемых прикладных задач, и делать заключение о характере реального процесса на основе анализа</p>	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	Уметь (У1) с рядом негрубых ошибок. Владеть способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Уметь (У1) с незначительными погрешностями. Владеть способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Уметь (У1) без ошибок и погрешностей. Владеть способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Уметь (У1.) Владеть способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	Знать основной и дополнительный материал без ошибок и погрешностей. Уметь (У1) Свободно. Владеть способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

Оценка уровня формирования компетенции ОК-7

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
<p>ЗНАТЬ З1(ОК-7) как решать математические задачи и проблемы, аналогичные ранее изученным: З2(ОК-7) как анализировать и</p>	Отсутствие логических связей, путаница в понятиях.	<p>Плохой уровень формирования компетенции.</p> <p>0-19 баллов - «Плохо»</p>

<p>осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления.</p> <p>УМЕТЬ У1(ОК-7) анализировать и осуществлять поиск современных технологий и методик для своего направления.</p> <p>ВЛАДЕТЬ В1(ОК-7) способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему..</p>	Наличие грубых ошибок при изложении материала, даже в тех ситуациях, когда преподаватель указывает на ошибки и поправляет.	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	Возможность исправить грубые ошибки в ситуации, когда преподаватель указывает на них.	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Наличие погрешностей (пробелов) при решении задач и формулировке результатов при владении большинством основных навыков.	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Возможность без ошибок и пробелов в рассуждениях продемонстрировать результаты в стандартных ситуациях	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Знание основных методов и умений, возможность без ошибок и пробелов в рассуждениях продемонстрировать результаты в стандартных ситуациях и продвинуться в нестандартных.	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	Свободное владение материалом, возможность справиться без ошибок и пробелов с нестандартными задачами, в том числе связанными с приложениями. Владеть всеми навыками, демонстрируя их в стандартных и нестандартных ситуациях.	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

Оценка уровня формирования компетенции ПК-1

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
<p>ЗНАТЬ З1(ПК-1) принципы определения общих форм и закономерностей эргодической теории.</p>	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных	Плохой уровень формирования компетенции. 0-19 баллов - «Плохо»

УМЕТЬ <i>У1(ПК-1) определять общие формы и закономерности в области эргодической теории.</i> ВЛАДЕТЬ <i>В1(ПК-1) опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории</i>	компетенцией.	
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	Уметь (У1) с рядом негрубых ошибок. Владеть опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Уметь (У1) с незначительными погрешностями. Владеть опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Уметь (У1) без ошибок и погрешностей. Владеть опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Уметь (У1.) Владеть опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	Знать основной и дополнительный материал без ошибок и погрешностей. Уметь (У1) Свободно. Владеть опытом определения общих форм и закономерностей эргодической теории.	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

Карта компетенций для оценивания умений и навыков

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)						
	«плохо»	«неудовлетворительно»	«удовлетворительно»	«хорошо»	«очень хорошо»	«отлично»	«превосходно»

		льно»	»				
Умения У1(ОПК-1), У1(ОК-7), У1(ПК-1)	отсутствует способность решения стандартных задач	наличие грубых ошибок при решении стандартных задач	способность решения основных стандартных задач с негрубыми ошибками	способность решения всех стандартных задач с незначительными погрешностями	способность решения всех стандартных задач без ошибок и погрешностей	Способность решения стандартных и некоторых нестандартных задач	способность решения стандартных задач и широкого круга нестандартных задач
Навыки В1(ОПК-1), В1(ОК-7), В1(ПК-1)	полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией	отсутствие ряда важнейших навыков, предусмотренных данной компетенцией	наличие минимального необходимого множества навыков	наличие большинства основных навыков, продемонстрированных в стандартных ситуациях	наличие всех основных навыков, продемонстрированных в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных ситуациях	наличие всех навыков, продемонстрированное в стандартных и нестандартных ситуациях
	0-19	20-49	50-59	60-79	80-89	90-99	100

6.2 Описание шкал оценивания

Для оценивания результатов учебной деятельности студентов при изучении дисциплины «Эргодическая теория» используется балльная система оценки учебной работы студентов.

По результатам промежуточной аттестации в виде экзамена проставляются оценки «Превосходно», «Отлично», «Очень хорошо», «Хорошо», «Удовлетворительно», «Неудовлетворительно», «Плохо» в соответствии с таблицей (ниже).

Соответствие между баллами и качественной оценкой

Активности	Баллы	Качественная оценка
<ul style="list-style-type: none"> Выполнение домашних работ (100%) ответ вопросы согласно дескрипторам 	98-100	Превосходно
<ul style="list-style-type: none"> Выполнение домашних работ (100%) ответ вопросы согласно дескрипторам 	91-98	Отлично

<ul style="list-style-type: none"> • Выполнение домашних работ (100%) • ответ вопросы согласно дескрипторам, 	80 – 89	Очень хорошо
<ul style="list-style-type: none"> • Выполнение домашних работ (100%) • ответ вопросы согласно дескрипторам, 	60-79	Хорошо
<ul style="list-style-type: none"> • Выполнение домашних работ (100%) • ответ вопросы согласно дескрипторам, 	50 – 59	Удовлетворительно
<ul style="list-style-type: none"> • Выполнение домашних работ (60%) • ответ вопросы согласно дескрипторам, 	20-49	Неудовлетворительно
<ul style="list-style-type: none"> • Выполнение домашних работ (50%) • ответ вопросы согласно дескрипторам 	0-19	Плохо

6.3 Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

-устные ответы

- письменные ответы на вопросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические работы, включающие постановку одной сложной учебной задачи в виде краткой формулировки действий, которые следует выполнить, и описания результата, который нужно получить.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции

Примеры заданий для оценки компетенции ОК-7

1. Prove that if a homeomorphism: $X \rightarrow Y$ provides conjugacy for two invertible maps $f : X \rightarrow X$ and $g : Y \rightarrow Y$, then h also provides conjugacy for the induced cascades, i.e. prove that $h \circ f = g \circ h$ implies $h \circ f^n = g^n \circ h$ for every $n \in \mathbf{Z}$.

2. Prove that cascades induced by the following two maps f and g are conjugate:

- $f : T^1 \rightarrow T^1$, where $T^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ and f is given by $f(x) = x + \alpha \pmod{1}$;
- $f : S^1 \rightarrow S^1$, where $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ and g is given by $g(z) = z \cdot e^{2\pi i \alpha}$.

Примеры заданий для оценки компетенций ОПК-1, ПК-1

1. Что такое динамическая система с топологической точки зрения? Что такое каскады и потоки?
2. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем?

Пример экзаменационного билета вопросов, выносимых на экзамен

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Институт/факультет Информационных технологий, математики и механики
Кафедра Дифференциальных уравнений, математического и численного анализа
Дисциплина Эргодическая теория

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Что такое динамическая система с топологической точки зрения? Что такое каскады и потоки? (ОПК-1, ПК-1)
2. Топологическая сопряженность и эквивалентность динамических систем? (ОК-7, ПК-1)

Зав. кафедрой _____

Экзаменатор _____

6.5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утвержденное приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. №55-ОД.

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015г. №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература

1. Материалы сайта <http://www.unn.ru/e-learning/> - курс Эргодическая теория
2. **Каток А., Хасселблатт Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений**, МЦНМО, 2005
<http://libgen.io/book/index.php?md5=6D772D928188481C16E64C57CB7D06D8>
3. **Биллингслей П. Эргодическая теория и информация**, Мир, 1969,
<http://libgen.io/ads.php?md5=D3979D706A0AA2F6F5F82FF4443A070B>

б) дополнительная литература

1. [Michael Blank. Ergodic averaging with and without invariant measures](https://arxiv.org/pdf/1709.06327.pdf)
<https://arxiv.org/pdf/1709.06327.pdf>
- 2.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет». Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Автор _____ М.И. Малкин

Рецензент _____

Заведующий кафедрой _____ Д.В.Баландин

Программа одобрена методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

от _____ года, протокол № _____.