

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДАЮ:

Директор _____ В.П. Гергель

« _____ » _____ 2017 г.

Рабочая программа дисциплины

Приложения дифференциальных уравнений

Уровень высшего образования

бакалавриат

Направление подготовки

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность образовательной программы

общий профиль

Квалификация (степень)

Бакалавр

Форма обучения

очная

Нижний Новгород
2017

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Приложения дифференциальных уравнений» относится к вариативной части ОПОП. Для ее успешного изучения необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения предшествующих дисциплин: математического анализа, фундаментальной и компьютерной алгебры, аналитической геометрии, дифференциальных уравнений.

Освоение дисциплины «Приложения дифференциальных уравнений» необходимо при последующем изучении дисциплин «Уравнения математической физики», «Дифференциальная геометрия и топология» и ряда других, включая дисциплины по выбору. Дисциплина обязательна для освоения в 4 семестре второго года обучения.

Форма отчетности – экзамен (4 семестр).

Целями освоения дисциплины являются:

Целями освоения дисциплины «Приложения дифференциальных уравнений» являются:

- 1) фундаментальная подготовка в области дифференциальных уравнений;
- 2) овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях;
- 3) овладение основными методами исследования конкретных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, изучение возможных модельных типов поведения их решений.

2. Планируемые результаты обучения дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
ОПК-3 - способность к самостоятельной научно-исследовательской работе Базовый этап	ЗНАТЬ основные определения и теоремы курса дифференциальных уравнений. УМЕТЬ применять полученные знания для исследования дифференциальных уравнений и их систем ВЛАДЕТЬ навыками и методами исследования решений дифференциальных уравнений и их систем.
ПК-3 –способность строго доказывать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата Базовый этап	ЗНАТЬ знать классификацию основных типов линейных систем и соответствующих им фазовых портретов; основные типы дифференциальных уравнений и систем, решаемых в квадратурах; УМЕТЬ доказывать теорему Коши и другие теоремы теории дифференциальных уравнений, исследовать на устойчивость решения систем дифференциальных уравнений, создавать математические модели физических задач ВЛАДЕТЬ приемами исследования на устойчивость решений ДУ, техникой нахождения интегралов в простейших случаях,

ОК-7 – способность к самоорганизации и к самообразованию Базовый этап	<p>ЗНАТЬ методы поиска литературы в интернете, основные сайты, где имеется литература по нужной тематике</p> <p>УМЕТЬ самостоятельно работать с литературой, искать источники с помощью Интернет-ресурсов и поисковых систем, осваивать новый материал, опираясь на базовые знания, полученные в процессе учебы.</p> <p>ВЛАДЕТЬ приемами поиска нужной литературы, работы с новыми источниками, методами запоминания</p>
ПК-4 – способность публично представлять собственные и известные научные результаты Базовый этап	<p>ЗНАТЬ основные текстовые редакторы, графические редакторы, их возможности и методы построения нужных рисунков</p> <p>УМЕТЬ сделать представление доклада, лекции с помощью различных редакторов, продумать логику представления. Уметь провести семинар, лекцию, доклад с целью донесения материала в наилучшей форме.</p> <p>ВЛАДЕТЬ методами работы с основными текстовыми редакторами, графическими редакторами, методы построения нужных рисунков и их оформления в цветовом и лингвистическом плане</p>

3. Структура и содержание дисциплины «Приложения дифференциальных уравнений»

Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц, всего 180 часов, из которых

64 часа составляет **контактная работа** обучающегося с преподавателем:

32 часа занятия лекционного типа,

16 часов занятия семинарского типа,

16 часов занятия лабораторного типа,

116 часов составляет **самостоятельная работа** обучающегося (в т.ч. включая 45 часов подготовки к экзамену)

Содержание дисциплины

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Всего (часы)	В том числе				
				контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы				Самостоятельная работа обучающегося, часы
				Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Занятия лабораторного типа	Всего	
1	Краевые задачи для линейных ДУ второго порядка, теорема об альтернативе. Функция Грина краевой задачи, решение	4	21	4	2	2	8	13

	неоднородной краевой задачи с помощью функции Грина.							
2	Общая теория систем линейных дифференциальных уравнений ДУ 1-го порядка. Формула Лиувилля – Остроградского. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных для неоднородной системы. Фундаментальные матрицы и их вид.	4	21	4	2	2	8	13
3	Системы линейных ДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера, характеристическое уравнение. Нахождение фундаментальной системы решений. Неоднородные системы с правой частью в виде векторного квазиполинома	4	31	8	2	2	12	19
4	Доказательство теоремы существования и единственности, различные варианты теоремы, продолжение решений, непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров.	4	21	4	2	2	8	13
5	Дифференцируемость решения по параметру и начальным значениям. Уравнения в вариациях.	4	19	2	2	2	6	13
6	Понятия теории динамических систем, траектории, классификация. Фазовая плоскость. Топология фазовых кривых. Классификация линейных особых точек на плоскости. Замкнутые кривые: отображение Пуанкаре, устойчивость предельного цикла	4	21	4	2	2	8	13
7	Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость. Критерий устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами. Критерий Рауса-Гурвица. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Теорема Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости нелинейных систем.	4	18	2	2	2	6	12
8	Первые интегралы автономной системы. Существование полной системы первых интегралов.	4	14	2	1	1	4	10
9	Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши.	4	14	2	1	1	4	10

	Теорема существования и единственности решения задачи Коши.							
	В т.ч. текущий контроль		2					
	Промежуточная аттестация: Экзамен							

4. Образовательные технологии

Используются образовательные технологии в форме лекций, практических занятий.

Лекция-информация. Ориентирована на изложение и объяснение студентам научной информации, подлежащей осмыслению и запоминанию.

Практические занятия. Одна из форм учебного занятия, направленная на развитие самостоятельности обучающихся и приобретение умений и навыков. Данные учебные занятия углубляют, расширяют, детализируют полученные на лекции знания. Практическое занятие предполагает выполнение студентами по заданию и под руководством преподавателей нескольких домашних практических работ. На практических занятиях выделяется время для проведения презентации и обсуждения проектных работ.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

В течение семестра студенты к каждому семинару решают задачи, указанные преподавателем. В семестре проводятся 2 контрольные работы (на семинарах).

5.1 Виды самостоятельной работы студентов

- ❖ Выполнение домашних практических заданий.
- ❖ Работа над материалом лекций, попытки самостоятельного доказательства теоретических вопросов, вывод формул и построение графических иллюстраций к теоретическому материалу.

5.2 Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов, практические задания для проведения текущего контроля

а) Основная литература:

1. Лерман Л.М. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.-Ижевск: Изд-во РХД, 2016

20 экземпляров книги имеются в научной библиотеке ННГУ.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (4-е изд.). М.: Наука, 1974

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2003

<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=0&IdField=124201545&DB=1>

б) Дополнительная литература:

1. Арнольд В.И., Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 4 Московский центр непрерывного математического образования

<http://www.klex.ru/bwk>

2. Андронов А.А., Леонтович Е.В., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

4. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

5.3. Вопросы для контроля:

1. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения, порядок д.у.
Решение дифференциального уравнения. Уравнение, разрешенное относительно старшей производной. Примеры дифференциальных уравнений. Геометрический смысл дифференциального уравнения и его решений, изоклины.
2. Задача Коши для ОДУ первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решений.
3. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения.
4. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка: линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли, случаи интегрируемости уравнения Риккати.
5. Уравнение $x' = f(x)$ и одномерная теория динамических систем.
6. Интегрирование д. у. первого порядка: симметричная форма д.у. первого порядка, уравнения в полных дифференциалах.
7. Интегрирование уравнения математического маятника, случай $0 < C < 2$.
8. Интегрирование уравнения математического маятника, случай $C > 2$.
9. Интегрирование уравнения математического маятника, случай $C = 2$.
10. Классы уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка.
11. Понятие о дифференциальных уравнениях первого порядка, не разрешенных относительно производной, геометрия, связанная с таким уравнением.
12. Регулярные и особые точки уравнения, не разрешенного относительно производной, теорема о существовании решений на листе регулярных точек.
13. Решение уравнений, не разрешенных относительно производной методом введения параметра, поведение решений около особых точек (на примерах).
14. Фундаментальная система решений для системы с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения. Изложить основную идею построения ф.с.р. и показать реализацию в случае одной жордановой клетки.
- 15.

Нахождение частного решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами в случае неоднородности в виде векторного квазиполинома. Сформулировать основную идею и показать ее реализацию на примере одной экспоненты.

16. Теорема существования и единственности решений д.у. первого порядка (доказательство методом Пикара). Указать основные этапы доказательства, какие теоремы анализа используются для построения решения?
17. Формулировка теоремы существования и единственности решений для системы д.у. первого порядка, схема доказательства с указанием необходимых изменений по сравнению со скалярным случаем.
18. Понятие о продолжении решений д.у., теорема о продолжении решения, определяемого теоремой Пикара, до границы области определения.
19. Теорема существования решений линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, глобальность существования решений. Почему в линейном случае удается получить решение сразу на всем интервале?
20. Теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров.
21. Формулировки теорем и их смысл, уравнения в вариациях по начальному условию и параметрам.
22. Гладкость решения по начальным условиям и параметрам. Основная идея доказательства.
23. Вывод уравнений в вариациях по начальным условиям и параметру. Начальные условия для решения.
24. Понятие об автономных системах, фазовое пространство, фазовые траектории. Классификация фазовых траекторий. Понятие о задачах теории динамических систем.
25. Окрестность состояния равновесия автономной системы, фазовый портрет линейной системы на плоскости в случае фокуса.
26. Окрестность состояния равновесия автономной системы, фазовый портрет линейной системы на плоскости в случае узла.
27. Окрестность состояния равновесия автономной системы, фазовый портрет линейной системы на плоскости в случае седла.
28. Понятие функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и

асимптотической устойчивости.

29. Теорема об устойчивости по Ляпунову по первому приближению. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица.

30. Понятие об автономных системах, фазовое пространство, фазовые траектории.

Классификация фазовых траекторий. Понятие о теории динамических систем.

31. Окрестность состояния равновесия автономной системы, поведение траекторий линейной системы на плоскости.

32. Первый интеграл системы д.у. Уравнение для поиска интегралов, геометрический смысл первого интеграла. Функционально независимые интегралы. Понижение порядка нормальной системы при помощи первых интегралов.

33. Существование n независимых первых интегралов в окрестности точки (t_0, x_0) для нормальной системы n неавтономных д.у. первого порядка.

34. Первые интегралы автономных систем, существование независимых интегралов автономной системы в окрестности неособой точки. Примеры глобального существования первых интегралов в автономной системе.

35. Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка, его общее решение, связь с первыми интегралами ОДУ.

36. Квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка, характеристики, Решения, задача Коши для квазилинейного уравнения.

6. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:

6.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-3 способность к самостоятельной научно-исследовательской работе	Знать: основные определения и теоремы курса дифференциальных уравнений.	Устный опрос, письменный опрос, тестирование
	Уметь: применять полученные знания для исследования дифференциальных уравнений и их систем.	Письменный опрос, коллоквиум.
	Владеть: всеми основными методами решения	Круглый стол.

	дифференциальных уравнений и их систем.	
ПК-3 способность строго доказывать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Знать: формулировки основных теорем теории дифференциальных уравнений и математического анализа, классификацию уравнений и методов решений.	Устный опрос, письменный опрос, тестирование
	Уметь: доказывать теорему Коши и другие теоремы теории дифференциальных уравнений, решать основные типы уравнений первого порядка и высших порядков, исследовать на устойчивость решения систем дифференциальных уравнений, создавать математические модели физических задач.	Письменный опрос, коллоквиум
	Владеть: процедурой обработки результатов исследований, с учетом определения достоверности получаемой информации	Круглый стол
ОК-7 – способность к самоорганизации и к самообразованию	<p>ЗНАТЬ методы поиска литературы в интернете, основные сайты, где имеется литература по нужной тематике</p> <p>УМЕТЬ самостоятельно работать с литературой, искать источники с помощью Интернет-ресурсов и поисковых систем, осваивать новый материал, опираясь на базовые знания, полученные в процессе учебы.</p> <p>ВЛАДЕТЬ приемами поиска нужной литературы, работы с новыми источниками, методами запоминания</p>	Устный опрос, письменный опрос, тестирование
ПК-4 – способность публично представлять собственные и известные научные результаты	<p>ЗНАТЬ основные текстовые редакторы, графические редакторы, их возможности и методы построения нужных рисунков</p> <p>УМЕТЬ сделать представление доклада, лекции с помощью различных редакторов, продумать логику представления. Уметь провести</p>	Устный опрос

	<p>семинар, лекцию, доклад с целью донесения материала в наилучшей форме.</p> <p>ВЛАДЕТЬ методами работы с основными текстовыми редакторами, графическими редакторами, методы построения нужных рисунков и их оформления в цветовом и лингвистическом плане</p>	
--	--	--

6.2 Описание шкал оценивания результатов обучения дисциплине

Оценка	Уровень подготовки
Превосходно	<p>Высокий уровень подготовки, безупречное владение теоретическим материалом, студент демонстрирует творческий подход к решению нестандартных ситуаций. Студент дал полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета, подтверждая теоретический материал практическими примерами из практики. Студент активно работал на практических занятиях.</p> <p>100 %-ное выполнение контрольных экзаменационных заданий</p>
Отлично	<p>Высокий уровень подготовки с незначительными ошибками. Студент дал полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета, подтверждает теоретический материал практическими примерами из практики. Студент активно работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий на 90% и выше</p>
Очень хорошо	<p>Хорошая подготовка. Студент дает ответ на все теоретические вопросы билета, но имеются неточности в определениях понятий, процессов и т.п.</p> <p>Студент активно работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 80 до 90%.</p>
Хорошо	<p>В целом хорошая подготовка с заметными ошибками или недочетами. Студент дает полный ответ на все теоретические вопросы билета, но имеются неточности в определениях понятий, процессов и т.п. Допускаются ошибки при ответах на дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора. Студент работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 70 до 80%.</p>
Удовлетворительно	<p>Минимально достаточный уровень подготовки. Студент показывает минимальный уровень теоретических знаний, делает существенные ошибки при характеристике нормативно-правовой базы валютного регулирования, но при ответах на наводящие вопросы, может правильно сориентироваться и в общих чертах дать правильный</p>

	<p>ответ. Студент посещал практические занятия.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 50 до 70%.</p>
Неудовлетворительно	<p>Подготовка недостаточная и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы, как на теоретические вопросы билета, так и на наводящие и дополнительные вопросы экзаменатора. Студент пропустил большую часть практических занятий.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий до 50%.</p>
Плохо	<p>Подготовка абсолютно недостаточная. Студент не отвечает на поставленные вопросы. Студент отсутствовал на большинстве лекций и практических занятий.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий менее 20 %.</p>

6.3 Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- тестирование;
- индивидуальное собеседование,
- письменные ответы на вопросы.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

- I. Семейство линий $y = Cx^3$ является общим решением дифференциального уравнения:
 1) $xy' = 3y$; 2) $y^2 + y'^2 = 1$; 3) $x^2y' - xy = yy'$; 4) $y' = 3y^{2/3}$; 5) $y = e^{x/y}$.
- II. Выражение $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$ - общий интеграл дифференциального уравнения:
 1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$; 3) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$;
 4) $xy' + y = y^2$; 5) $y' = 10^{x+y}$.
- III. Дифференциальное уравнение является однородным:
 1) $(x+2y-1)dx + xdy = 0$; 2) $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$; 3) $(x+y)dx + (y-1)dy = 0$;
 4) $(x^2 + y)dx - xydy = 0$; 5) $(1-x)dx + (x+y)dy = 0$.
- IV. Функция $\mu(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$ - интегрирующий множитель дифференциального уравнения:
 1) $(x^2 - y)dx + x(y+1)dy = 0$; 2) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$;
 3) $(x^2 - y^2 + y)dx - xdy = 0$; 4) $xy^2(xy' + y) = 1$; 5) $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$.
- V. Дифференциальное уравнение $(x+1)y'' = y + \sqrt{y}$ имеет единственное решение при начальных условиях:
 1) $x_0 = -1, y_0 < 0, y'_0$ - любое; 2) $x_0 = -1, y_0 > 0, y'_0$ - любое;
 3) $x_0 \neq -1, y_0 = 0, y'_0 = 1$; 4) $x_0 = -1, y_0 = -2, y'_0 = 0$; 5) $x_0 = -1, y_0 = 0, y'_0 = 0$.
- VI. Функция $y = 0,25x^2$ является особым решением дифференциального уравнения:
 1) $y = 2xy' - 4y'^2$; 2) $y = xy' - y'^2$; 3) $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$; 4) $xy' - y = \ln y'$;
 5) $x = y^2 + y'$.
- VII. Уравнение $y'' - 2y' = 2e^x$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $y(1) = -1, y'(1) = 0$:
 1) $y = (7 - 3x)e^{x-2}$; 2) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$; 3) $y = e^{2x} - 3e^x - 1$; 4) $y = e^{-x} - e + x - 1$;
 5) $y = -2x^2 + 4x + 1$.
- VIII. Выражение $y = x^2e^x$ - частное решение (возможно более низкого порядка) дифференциального уравнения:
 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$; 2) $y^{IV} + 2y' + y = 0$; 3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
- IX. Система функций линейно зависима:
 1) $x+2, x-2$; 2) $6x+9, 8x+12$; 3) $\sin x, \cos x$; 4) $1, x, x^2$; 5) e^x, e^{2x}, e^{3x} .
- X. Уравнением Эйлера является:
 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$;
 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.
- XI. Функция $y = x^3$ является решением уравнения:
 1) $x^2y'' - 4y' + 6y = 0$; 2) $x^2y'' - 2y' - 3y = 0$; 3) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$;
 4) $x^3y''' + x^2y' - y = 0$; 5) $(x-2)^2y'' - 3y' + 4y = 0$.

XII. Функция $f(x, y)$ не удовлетворяет условию Липшица по y на прямой $y = -x$:

- 1) $f(x, y) = x^2 - y^2$; 2) $f(x, y) = x + y$; 3) $f(x, y) = x^2 + y^2$; 4) $f(x, y) = 1 + \sqrt{x + y}$;
5) $f(x, y) = 1 + x + y$.

XIII. Расстояние между соседними нулями уравнения $y'' + 2xy = 0$ на $[20; 45]$ удовлетворяет оценкам:

- 1) $0,5 < d < 1$; 2) $0,33 < d < 0,5$; 3) $0,2 < d < 0,3$; 4) $0,1 < d < 0,2$;
5) $0,31 < d < 0,33$.

XIV. Нулевое решение системы устойчиво:

- 1) $x' = x, y' = 2y$; 2) $x' = 2x, y' = y$; 3) $x' = -x, y' = y$; 4) $x' = -x, y' = -2y$;
5) $x' = x, y' = -y$;

XV. Особая точка $(0, 0)$ системы является седлом:

- 1) $x' = 3x, y' = 2x + y$; 2) $x' = x + 3y, y' = -6x - 5y$; 3) $x' = x, y' = 2x - y$; 4)
 $x' = -2x - 5y, y' = 2x + 2y$; 5) $x' = 3x + y, y' = y - x$.

XVI. Выражение $z = f(x^2 + y^2)$ есть общее решение уравнения:

- 1) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 2) $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 3) $2y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; 4) $y \frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
5) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

I. Функция $y = x + C\sqrt{1 + x^2}$, где $C \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения:

- 1) $(xy - 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$; 2) $(xy + 1)dx - (x^2 + 1)dy = 0$;
3) $(xy + 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0$.

II. Интегральные кривые уравнения $xy' = 2y$ имеют вид:

- 1) $xy = C$; 2) $y = C + x^2$; 3) $y = Cx^2$.

III. Дифференциальное уравнение является однородным:

- 1) $(x - y + 1)dx + (x + y)dy = 0$; 2) $x dy = (y + \sqrt{x^2 - y^2})dx$;
3) $(x + 2y)dx - (x + 1)dy = 0$.

IV. Заменой $z = y^{-1}$ к линейному приводится уравнение:

- 1) $y^3 y' - xy = x$; 2) $y' + x^2 y = xy^2$; 3) $y^2 y' - xy = x^2$.

V. Последовательные приближения $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ в задаче Коши $y' = x - y^2, y(0) = 0$ имеют вид:

- 1) $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10}$; 2) $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$;
3) $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20}$.

VI. Общим решением уравнения $y''' - \frac{1}{x} y'' = 0$ является:

$$1) y = x^2 + C_1x + C_2; \quad 2) y = C_1x + C_2; \quad 3) y = C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

VII. Определитель Вронского системы функций $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ равен:

$$1) 1; \quad 2) -1; \quad 3) 0.$$

VIII. Уравнение не является уравнением в полных дифференциалах:

$$1) (x+y)dx + (x-y+1)dy = 0;$$

$$2) (2x+y)dx + (x-3y+4)dy = 0;$$

$$3) \left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \left(1 - \frac{y-1}{x}\right)dy = 0.$$

IX. Функции $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-2x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения:

$$1) y'' + 4y = 0; \quad 2) y'' - 4y = 0; \quad 3) y'' - 2y = 0.$$

X. Функция $y = x^2$ является частным решением уравнения:

$$1) x^3y''' - xy' - 3y = -5x^2; \quad 2) x^3y''' - xy' - 3y = x^2; \quad 3) x^3y''' + xy' - 3y = x^2.$$

XI. Общим решением системы $\frac{dx}{dt} = x \sin t, \frac{dy}{dt} = xe^{\cos t}$ является:

$$1) x = C_1 e^{\cos t}, y = C_1 t + C_2; \quad 2) x = C_1 e^{-\cos t}, y = C_1 t + C_2; \quad 3) x = C_1 e^{-\cos t}, y = C_1 + C_2 t.$$

XII. Соотношение $\varphi = t^2 + 2xy$, является первым интегралом системы уравнений:

$$1) \frac{dx}{dt} = -y, \frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - t}{x}; \quad 2) \frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x; \quad 3) \frac{dx}{dt} = x - y, \frac{dy}{dt} = y - 4x.$$

XIII. Выражение $x = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$ есть общее решение системы:

$$1) \frac{dx}{dt} = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad 2) \frac{dx}{dt} = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$3) \frac{dx}{dt} = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

XIV. Решения системы $\frac{dx}{dt} = -x + \alpha y, \frac{dy}{dt} = \alpha x - y$ асимптотически устойчивы, если:

$$1) -2 < \alpha < -1; \quad 2) 1 < \alpha < 2; \quad 3) -1 < \alpha < 1.$$

XV. Функция $V(x, y)$ является знакоопределённой:

$$1) V(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2) V(x, y) = (x + y)^2; \quad 3) V(x, y) = x^2 - y^2.$$

XVI. Положение равновесия системы уравнений устойчивый узел:

$$1) \frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x + 2y; \quad 2) \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \frac{dy}{dt} = x - 4y; \quad 3) \frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x + 3y.$$

XVII. Функция $z = x^3 + y^2 + 1$ есть решения уравнения:

$$1) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad 2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; \quad 3) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

I. Функция $y = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$, где $C \in R$, является решением дифференциального уравнения:

$$1) y + xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}; \quad 2) y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}; \quad 3) y - xy' = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

II. Интегральные кривые уравнения $xy' = -y$ имеют вид:

$$1) y = Cx; \quad 2) y = C + x; \quad 3) xy = C.$$

III. Дифференциальное уравнение является линейным:

$$1) y = xy' + 1; \quad 2) y = xy' + y^2; \quad 3) yy' = x.$$

IV. Решением дифференциального уравнения $y' + y = 2$ являются:

$$1) y = x; \quad 2) y = 2; \quad 3) y = -2.$$

V. Дифференциальное уравнение является однородным:

$$1) \sqrt{x^2 - y^2} dx + x dy = 0; \quad 2) \sqrt{x^2 - y^2} dx + dy = 0; \quad 3) \sqrt{x^2 - y^2} dx + xy dy = 0.$$

VI. Уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$1) (y^2 + 1)dx - x dy = 0; \quad 2) (x - y)dx + (x + y)dy = 0; \quad 3) (x - y)dx + (-x + y)dy = 0.$$

VII. Функция $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$ является интегрирующим множителем уравнения:

$$1) \left(1 + \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0; \quad 2) \left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0;$$
$$3) \left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy - \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0.$$

VIII. Функция линейно зависима:

$$1) 1, x; \quad 2) \sin x, \cos x; \quad 3) \sin^2 x, \cos^2 x.$$

IX. Функции $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного линейного уравнения:

$$1) y'' - y = 0; \quad 2) y'' + y = 0; \quad 3) y'' - 4y = 0.$$

X. Особая точка (положение равновесия) системы уравнения является седлом:

$$1) \frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x + 2y; \quad 2) \frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x + 3y; \quad 3) \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \frac{dy}{dt} = x - 4y.$$

XI. Сколько особых точек (положений равновесия) имеет система уравнений

$$- \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2 - 5, \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 13;$$

$$1) 2; \quad 2) 3; \quad 3) 4.$$

- I. Дифференциальным уравнением семейства кривых $x^2 + y^2 = Cx$, где $C \in R$, является уравнение:
 1) $2xyy' = y^2 + x^2$; 2) $2xyy' = y^2 - x^2$; 3) $xyy' = y^2 - x^2$
- II. Интегральные кривые уравнения $y' = 2xy$ имеют вид:
 1) $ye^{x^2} = C$; 2) $y = Ce^x$; 3) $y = Ce^{x^2}$.
- III. Дифференциальное уравнение является линейным:
 1) $xy' = y + x$; 2) $xy' = y^2 + x$; 3) $xy' = \sqrt{y}$;
- IV. Решением дифференциального уравнения $y' + y = -3$ являются:
 1) $y = -x$; 2) $y = 3$; 3) $y = -3$.
- V. Дифференциальное уравнение является однородным:
 1) $\sqrt{x}dx + (x - y)dy = 0$; 2) $ydx - xdy = 0$; 3) $(y + 1)dx + xdy = 0$.
- VI. Уравнение является уравнением в полных дифференциалах:
 1) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$; 2) $dx + xydy = 0$; 3) $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0$.
- VII. Функция $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$ является интегрирующим множителем дифференциального уравнения:
 1) $(x^2 + \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$; 2) $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0$;
 3) $(x^2 - \sin^2 y)dx - x \sin 2y dy = 0$.
- VIII. Функции линейно зависимые:
 1) $4 - x, 2x - 8$; 2) e^x, e^{2x} ; 3) $1, x$.
- IX. Функции $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения:
 1) $y'' - 2y = 0$; 2) $y'' + 2y = 0$; 3) $y'' + y = 0$.
- X. Особая точка (положение равновесия) системы является узлом:
 1) $\frac{dx}{dt} = 2y, \frac{dy}{dt} = 2x + 3y$; 2) $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = x + 2y$; 3) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x$.
- XI. Сколько особых точек (положение равновесия) имеет система уравнений
 $\frac{dx}{dt} = xy + 4, \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 17$: 1) 3; 2) 1; 3) 4.
- XII. Функция $V(x, y)$ является знакопеременной:
 1) $V(x, y) = x^4 - y^4$; 2) $V(x, y) = x^2 + y^2$; 3) $V(x, y) = (x + y)^2$;
- XIII. Расстояние между соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения $y'' + 4\pi^2 y = 0$ равно: 1) 1; 2) 0,5; 3) 2.
- XIV. С помощью функции $V(x, y) = x^2 + y^2$ можно установить устойчивость тривиального решения системы:
 1) $x' = x - y, y' = x + y$; 2) $x' = -x + y, y' = -x + y$; 3) $x' = -x + y, y' = -x - y$.
- XV. Нулевое решение системы $\frac{dx}{dt} = -x - \alpha y, \frac{dy}{dt} = -\beta x - y$ асимптотически устойчиво, если:
 1) $\alpha\beta = -1$; 2) $\alpha\beta > -1$; 3) $\alpha\beta < -1$.
- XVI. Функция $u(x, y) = \ln x + y$ является решением уравнения:
 1) $x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; 2) $x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$; 3) $x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

Пример экзаменационного билета

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Институт/факультет Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра Дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

Дисциплина Приложения дифференциальных уравнений

1. Линейные однородные системы ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера, характеристическое уравнение, фундаментальная система решений в случае простых корней характеристического уравнения.

2. Продолжение решений ДУ, теорема о продолжении решения, определяемого теоремой существования и единственности, до границы области определения.

Зав. кафедрой _____

Экзаменатор _____

6.5 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ», утверждённое приказом ректора ННГУ от 13.02.2014 г. №55-ОД,

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература:

1. Лерман Л.М. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.--Ижевск: Изд-во РХД, 2016

20 экземпляров книги имеется в научной библиотеке ННГУ.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (4-е изд.). М.: Наука, 1974

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm>

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2000..

<http://www.lib.unn.ru/php/catalog.php?Index=1&IdField=113010079&DB=14>

б) Дополнительная литература:

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991.

<http://www.decoder.ru/media/file/0/2614.pdf>

2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

<http://www.alleng.ru/d/math/math539.htm>

3. Арнольд В.И., Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений

<http://www.klex.ru/bwk>

4. Андронов А.А., Леонтович Е.В., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

7. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет». Наличие рекомендованной литературы.

Программа составлена в соответствии с ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению **02.03.01. Математика и компьютерные науки**

Автор _____ д.ф.-м.н., проф. Лерман Л.М.

Рецензент _____

Заведующий кафедрой _____ Д.В. Баландин

Программа одобрена методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

от _____ года, протокол № _____.