

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им.
Н.И. Лобачевского»**

Институт информационных технологий, математики и механики

УТВЕРЖДАЮ:

Директор _____ В.П. Гергель

« ____ » _____ 2018 г.

Рабочая программа дисциплины

Математический анализ

Уровень высшего образования

бакалавриат

Направление подготовки

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность образовательной программы

Инженерия программного обеспечения

Квалификация (степень)

Бакалавр

Форма обучения

очная

Нижний Новгород
2018

1. Место и цели дисциплины в структуре ОПОП

Курс «Математический анализ» относится к базовой части ОПОП бакалавриата по направлению подготовки «02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии». Обязателен для освоения в 1,2,3 семестрах, в первого и второго года обучения. Индекс дисциплины - **Б1.Б.5**

Форма отчетности – зачет (1,2,3 семестр), экзамен (1,2,3 семестр).

Целями освоения дисциплины являются:

- ознакомление с фундаментальными методами исследования переменных величин посредством анализа бесконечно малых, основу которого составляет теория дифференциального и интегрального исчисления;
- приобретение навыков математического моделирования различных процессов и закономерностей реального мира;
- подготовка фундаментальной базы для изучения дисциплин: «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимизации», «Вычислительные методы», «Концепции современного естествознания» и др.
- воспитание у студентов математической культуры;
- формирование математического мышления;
- привитие навыков работы в команде;
- развитие способностей к самоорганизации и самообразованию.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
ОК7 способность к самоорганизации самообразованию - способностью критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности	УМЕТЬ <i>У1(ОК7) воспринимать, обобщать и анализировать информацию;</i> ВЛАДЕТЬ <i>В1(ОК7) способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.</i>

(начальный этап)	
<p>ОПК1 способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с фундаментальной информатикой и информационными технологиями</p> <p>(начальный этап)</p>	<p>УМЕТЬ <i>У1(ОПК1) – использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики,</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Находить грани множества. 2. Вычислять пределы числовых последовательностей и функций, связанные с неопределенностями $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^{\infty}$ 3. Находить производные и дифференциалы высших порядков, уравнение касательной к графику функции в точке. 4. Проводить полное исследование функции и на основании данного исследования строить эскизы графиков функций заданных явно и параметрически. 5. Интегрировать простейшие дроби, выражения, рационально зависящие от тригонометрических функций, дифференциальный бином. 6. Применять определенный интеграл для решения задач, связанных с определением длины дуги и спрямляемой кривой, площади плоской фигуры, площади поверхности вращения. 7. Находить кратные и повторные пределы функции. 8. Исследовать непрерывность функции по совокупности переменных и по отдельным переменным. 9. Находить касательную плоскость и нормаль к поверхности. 10. Вычислять старшие производные неявных функций. 11. Находить локальный, глобальный экстремум функции на множестве, условный экстремум функции. 11. Исследовать сходимость рядов с помощью признаков Даламбера, Коши, Раабе. Интегральный признак сходимости. 12. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов с помощью признака Лейбница 13. Применять признаки Абеля и Дирихле для исследования сходимости произвольных рядов. 14. Исследовать сходимость функциональных рядов на равномерность с помощью критерия Коши равномерной сходимости и достаточных признаков Вейерштрасса, Абеля, Дирихле. 15. Находить область и радиус сходимости степенного ряда с

	<p>использованием формул Даламбера, Коши и Коши-Адамара.</p> <p>16. Исследовать несобственные интегралы 1 и 2 рода на сходимость, а интегралы, зависящие от параметров, на сходимость и равномерную сходимость.</p> <p>17. Применять Эйлеровы интегралы к вычислению некоторых определенных и несобственных интегралов.</p> <p>18. Раскладывать периодическую и произвольную функцию, определенную на отрезке, в тригонометрический ряд Фурье и выяснять характер сходимости полученного ряда.</p> <p>ВЛАДЕТЬ <i>В1(ОПК1) математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры</i></p> <p>ЗНАТЬ <i>З1(ОПК1) – основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой</i></p> <p>Понятие числовой последовательности, ее предела.</p> <p>Определение предела функции в точке по Гейне и Коши.</p> <p>Классификацию точек разрыва функции.</p> <p>Понятие производной и дифференциала.</p> <p>Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.</p> <p>Теорему Ферма о необходимом условии локального экстремума.</p> <p>Формулу Тейлора.</p> <p>Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.</p> <p>Понятие первообразной и неопределенного интеграла.</p> <p>Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости.</p> <p>Определение равномерной непрерывности функции.</p> <p>Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.</p> <p>Понятие кривой на плоскости и в пространстве. Параметризация кривой.</p> <p>Понятие функции многих переменных.</p> <p>Достаточное условие дифференцируемости.</p> <p>Необходимое условие локального экстремума.</p> <p>Понятие числового ряда.</p>
--	---

	<p>Понятия функциональной последовательности и функционального ряда.</p> <p>Понятие равномерной сходимости функциональных рядов.</p> <p>Понятие степенного ряда.</p> <p>Интегралы с бесконечными пределами, зависящие от параметра.</p> <p>Интегралы от неограниченных функций, зависящие от параметра.</p> <p>Эйлеровы интегралы.</p> <p>Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций на отрезке тригонометрическими и алгебраическими многочленами.</p> <p>Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье.</p> <p>Интеграл Фурье и преобразование Фурье.</p>
--	--

3. Структура и содержание дисциплины «Математический анализ»

Объем дисциплины составляет 19 зачетных единиц, всего 684 часа, из которых

345 часов составляет **контактная работа** обучающегося с преподавателем:

176 часов занятия лекционного типа;

160 часов практические занятия;

9 часов мероприятия промежуточной аттестации;

339 часов составляет **самостоятельная работа** обучающегося (в т.ч. включая 108 ч. подготовки к экзамену).

Содержание дисциплины

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	в том числе					
		контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них					Самостоятельная работа студента часы
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные	Консультации индивидуальные	Всего контактных часов	СРС
Введение. Предмет математического анализа. Очерк истории развития математического анализа. Математическая символика, обозначения.	1	1				1	
2. Основные понятия и обозначения словая прямая. Числовые множества: промежутки, интервалы, лучи. Окрестность точки. Ограниченные и неограниченные множества, грани множества. Существование точных граней ограниченных числовых множеств.	29	5	2			7	22
3. Числовые последовательности.	41	11	7			18	23

<p>Определение числовой последовательности. Сходимость и предел числовой последовательности. Свойства пределов и числовых последовательностей. Теорема о единственности предела, теорема об ограниченности сходящейся последовательности, предельный переход в неравенствах, арифметические действия со сходящимися последовательностями. Бесконечно малые и большие последовательности, связь между ними. Свойства бесконечно малых последовательностей.</p> <p>Предел монотонной последовательности. Число e. Принцип вложенных отрезков. Подпоследовательности. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Предельные точки числового множества. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши существования предела. Полнота числовой прямой.</p>						
<p>4. Предел функции:</p> <p>Функции действительного переменного. Область определения, множество значений. Равенство функций. График функции. Определение предела функции в точке по Гейне и Коши. Теорема эквивалентности определений. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Свойства пределов функций. Предел суперпозиции. Первый и второй замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей. Односторонние пределы и их связь с двухсторонними пределами. Обобщение понятия предела: бесконечно большие функции, пределы на бесконечности. Критерий Коши существования конечного предела функции в точке и на бесконечности.</p>	45	12	10		22	23
<p>5. Непрерывные функции:</p> <p>Различные определения непрерывности функции в точке. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность суперпозиции. Следствия второго замечательного предела. Свойства непрерывных функций. Локальная устойчивость знака. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность функции на множестве. Непрерывность элементарных функций. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке и достижении точных граней. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Условия непрерывности монотонной функции на отрезке. Теорема о непрерывности обратной функции. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые величины и их применение при вычислении пределов.</p>	45	12	10		22	23
<p>6. Производная функции:</p> <p>Задачи, приводящие к понятию производной функции. Средняя и мгновенная скорость изменения процесса. Производная и дифференциал функции в точке. Дифференцируемость функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная к графику функции в точке. Свойства производных и дифференциалов функций. Производная суперпозиции и обратной функции. Таблица производных. Дифференцируемость элементарных функций. Функции и кривые на плоскости, заданные параметрически. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Понятие кривой в пространстве. Параметризация кривой. Эквивалентность параметризаций. Гладкие и кусочно-гладкие кривые. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой, заданной параметрически. Инвариантность формы первого дифференциала. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям значений функции. Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства. Формула Лейбница. Неинвариантность формы дифференциалов высшего порядка.</p>	43	10	10		20	23

7. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения: Локальный экстремум функции. Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем. Формула конечных приращений. Локальная формула Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано. Представление основных элементарных функций по формуле Тейлора - Маклорена. Глобальная формула Тейлора на отрезке. Различные представления остаточного члена формулы Тейлора и его оценка. Применение формулы Тейлора при вычислениях функций на отрезке. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей. Критерий монотонности функции. Достаточные условия локального экстремума. Направления выпуклости, вогнутости функции. Точки перегиба. Достаточное условие перегиба. Асимптоты функции. Общая схема исследования и построения графиков функции. Нахождение глобального экстремума функции. Приближенные методы нахождения корней уравнений. Метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательной, оценка погрешности.	44	13	9			21	23
В т.ч. текущий контроль	2						
Промежуточная аттестация: зачет, экзамен							
Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Вс е г о (ч ас ы)	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные	Консультации индивидуальные	Вс е г о кон так тн ых час ов	СРС
1. Неопределенный интеграл: Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства интеграла. Таблица интегралов. Метод замены переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Рациональные и дробно-рациональные функции. Разложение правильной дробно-рациональной функции в сумму простейших дробей. Интегрирование простейших дробей. Метод неопределенных коэффициентов. Рационализация подинтегральной функции. Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Теорема Чебышева.	29	7	7			14	15
2. Определенный интеграл: (Интеграл Римана) Задачи о площади подграфика функции, о работе переменной силы, о массе неоднородного стержня. Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл. Интегрируемость функции по Риману. Суммы Дабру и их свойства. Критерий интегрируемости. Колебание функции на отрезке. Определение равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора. Классы интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла и интегрируемых	30	8	7			15	15

<p>функций. Теоремы о среднем. 9.5. Интеграл как функция верхнего предела. Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.</p> <p>Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.</p>							
<p>3. Приложения определенного интеграла</p> <p>Определение длины дуги и спрямляемой кривой. Вычисление длины дуги кривой в различных координатах. Дифференциал дуги кривой.</p> <p>Определение площади плоской фигуры. Критерий квадрируемости области. Квадрируемость области со спрямляемой границей. Вычисление площади плоских фигур.</p> <p>Объем тела. Критерий кубируемости тела. Вычисление объема тела с известными сечениями, и тела вращения.</p> <p>Площадь поверхности вращения.</p>	28	6	7			13	15
<p>4. Функции многих переменных и пределы:</p> <p>Арифметическое Евклидово пространство. Шаровая и кубическая окрестности точки.</p> <p>Последовательность в R^n. Сходимость и предел последовательности. Покоординатная сходимость. Критерий Коши сходимости последовательности в R^n.</p> <p>Ограниченные и неограниченные множества в R^n. Теорема Больцано-Вейерштрасса.</p> <p>Открытые и замкнутые множества. Компакты. Критерий компактности.</p> <p>Функции многих переменных. График функции двух переменных. Линии и поверхности уровня.</p> <p>Кратные и повторные пределы функции. Свойства пределов. Критерий Коши.</p>	27	6	6			12	15
<p>5. Непрерывные функции многих переменных:</p> <p>Различные определения непрерывности функции в точке. Непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным. Свойства непрерывных функций.</p> <p>Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции на связном множестве. Свойства функции, непрерывной на компакте: теорема Вейерштрасса об ограниченности и существовании глобальных экстремумов, теорема Кантора о равномерной непрерывности.</p>	28	7	6			13	15
<p>6. Дифференцирование функции многих переменных: Частные производные. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции. Достаточное условие дифференцируемости.</p> <p>Геометрический смысл дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала.</p> <p>Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.</p>	28	6	7			13	15

<p>Практические следствия инвариантности.</p> <p>Производная функции по направлению. Градиент функции</p> <p>Частные производные высших порядков. Равенство смешанных производных.</p> <p>Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы высших дифференциалов.</p> <p>Формула Тейлора. Оценка остаточного члена и приближенное вычисление функции с помощью формулы Тейлора. Формула Лагранжа конечных приращений.</p>							
<p>7. Неявно-заданные функции:</p> <p>Неявно-заданные функции и система неявных функций, одной и многих переменных. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости. Якобиан системы функций.</p> <p>Вычисление производных неявных функций.</p> <p>Уравнения касательной и нормали к графику функции, заданной неявно.</p>	25	5	5			10	15
<p>8. Экстремумы функций многих переменных</p> <p>Необходимое условие локального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума.</p> <p>Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа.</p> <p>Глобальные экстремумы функций (безусловные и условные).</p>	18	3	3			6	12
В т.ч. текущий контроль	2						
Промежуточная аттестация: зачет, экзамен							
<p>Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины,</p> <p>форма промежуточной аттестации по дисциплине</p>	Всего (часы)	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Лабораторные		Всего контактных часов	СРС
<p>1. Кратные интегралы</p> <p>Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Определение и свойства двойного интеграла.</p> <p>Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных. Геометрический смысл якобиана преобразования. Полярная замена координат.</p> <p>Тройные интегралы. Сведение к повторным. Замена переменных. Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве.</p> <p>Геометрические приложения двойных интегралов: объем бруса, площадь поверхности в случае явного и параметрического задания.</p>	24	7	7			14	10
<p>2 Числовые ряды:</p> <p>Понятие числового ряда. Связь с приближенными вычислениями. Частичные суммы числового ряда,</p>	29	8	10			18	11

<p>сходимость и расходимость рядов. Эквивалентность сходимости числовых рядов и числовых последовательностей.</p> <p>Основные свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Сходимость гармонических рядов.</p> <p>Знакопостоянные ряды. Критерий сходимости знакопостоянных рядов. Признаки сравнения сходимости знакопостоянного ряда.</p> <p>Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов Даламбера, Коши, Раабе. Интегральный признак сходимости.</p> <p>Абсолютная и условная сходимости произвольных числовых рядов. Признаки абсолютной сходимости рядов. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.</p> <p>Знакопеременные ряды. Признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов. Оценки суммы и остатка знакопеременного ряда, их использование для оценки погрешности вычислений.</p> <p>Признаки Абеля и Дирихле сходимости произвольных рядов. Теорема Римана о зависимости суммы условно сходящегося ряда от порядка следования членов.</p>							
<p>3 Функциональные ряды и последовательности</p> <p>Понятия функциональной последовательности и функционального ряда, их сходимость в точке и области. Эквивалентность сходимости функциональных последовательностей и рядов.</p> <p>Равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Достаточные признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.</p> <p>Функциональные свойства суммы ряда, связанные с равномерной сходимостью. Теорема о почленном переходе к пределу. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда. Теорема Дини. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании.</p>	25	7	7			14	11
<p>4 Степенные ряды</p> <p>Понятие степенного ряда. Лемма Абеля. Область и радиус сходимости. Вычисление радиуса сходимости: формулы Даламбера, Коши и Коши-Адамара.</p> <p>Свойства степенного ряда: непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование на интервале сходимости.</p> <p>Ряды Тейлора. Аналитические функции. Достаточное условие аналитичности. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора.</p> <p>Понятие ряда с комплексными членами. Формулы Эйлера.</p>	25	7	7			14	11
<p>5 Несобственные интегралы:</p> <p>Критерий Коши сходимости несобственных интегралов первого рода. Замена переменной и интегрирование по частям. Обобщение формулы Ньютона – Лейбница.</p>	25	8	7			15	10

<p>Сходимость интегралов от неотрицательных функций. Признаки сравнения.</p> <p>Интегралы от произвольных функций. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости. Условная сходимость. Признак Абеля-Дирихле.</p> <p>Интегралы от неограниченных функций. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости. Эквивалентность несобственных интегралов обоих типов.</p> <p>Главные значения Коши несобственных интегралов.</p>						
<p>6 Ряды Фурье</p> <p>Понятие гармоник, амплитуды, фазы. Тригонометрическая система функций и тригонометрический ряд.</p> <p>Ортогональность тригонометрической системы. Вычисление коэффициентов равномерно сходящегося тригонометрического ряда через его сумму.</p> <p>Определение тригонометрического ряда Фурье. Периодическое продолжение произвольной функции. Комплексная запись рядов Фурье.</p> <p>Различные типы сходимости рядов Фурье. Сходимость в среднем квадратичном смысле. Минимальное свойство отрезков Фурье. Стремление коэффициентов Фурье к нулю.</p> <p>Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Поточечная и равномерная сходимость рядов Фурье. Регулярные точки функции.</p>	26	8	7		15	11
<p>7 Криволинейные интегралы:</p> <p>Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла. Криволинейный интеграл первого рода, его вычисление.</p> <p>Криволинейный интеграл второго рода. Соотношение криволинейных интегралов. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.</p> <p>Ориентация контура. Плоская односвязная область. Интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью формулы Грина.</p> <p>Условия независимости интеграла от формы пути интегрирования. Восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу.</p>	27	9	8		17	10
<p>8 Поверхностные интегралы:</p> <p>Ориентация поверхности. Двусторонние поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Вычисление поверхностных интегралов с помощью двойного интеграла. Связь поверхностных интегралов.</p> <p>Поверхностно односвязная область. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от пути интегрирования. Восстановление функции трех переменных по ее полному дифференциалу.</p> <p>Пространственно односвязная область. Формула Остроградского и ее геометрические приложения.</p>	32	10	11		21	11

Элементы теории поля.							
В т.ч. текущий контроль	2						
Промежуточная аттестация: <u>зачет, экзамен</u>							

4. Образовательные технологии

Основной формой организации учебного процесса являются лекционные занятия. При выполнении практических работ, при самостоятельной работе и подготовке к зачету студенты имеют доступ к материалам курса, размещенным в системе электронного обучения ННГУ по адресу <http://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=1660>, режим доступа – требует авторизации.

Используются активные и интерактивные образовательные технологии в форме лекций, практических занятий, проектных работ.

Лекция-информация. Ориентирована на изложение и объяснение студентам научной информации, подлежащей осмыслению и запоминанию.

Практические занятия. Одна из форм учебного занятия, направленная на развитие самостоятельности обучающихся и приобретение умений и навыков. Данные учебные занятия углубляют, расширяют, детализируют полученные на лекции знания. Практическое занятие предполагает выполнение студентами по заданию и под руководством преподавателей нескольких домашних практических работ.

ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ:

1 семестр

Метод математической индукции. Бином Ньютона. Ограниченные и неограниченные множества. Точные грани числовых множеств.

Предел числовой последовательности. Верхние и нижние пределы. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Графическое изображение функций. Предел функции в точке и на бесконечности, односторонние пределы, бесконечный предел. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых. Исследование функций на непрерывность, точки разрыва и их классификация. Функции, заданные параметрически.

Основные правила нахождения производной. Односторонние производные. Уравнения касательной и нормали. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Раскрытие неопределенностей. Правила Лопиталя. Формула Тейлора. Исследование функций и построение графиков.

2 семестр

Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование рациональных функций. Вычисление определенных интегралов.

Вычисление длин дуг, площадей подграфиков и площадей поверхностей вращения, объемов тел вращения.

Предел функции многих переменных. Непрерывность. Частные производные и дифференциалы. Производная сложной функции. Производная по направлению, градиент. Дифференцирование неявных функций. Замена переменных. Формула Тейлора. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.

3 семестр

Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов. Арифметические действия над рядами.

Функциональные последовательности и ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса, признак Дирихле-Абеля для равномерной сходимости. Непрерывность суммы ряда. Почленное дифференцирование и почленное интегрирование функциональных рядов.

Степенные ряды. Радиус сходимости. Разложение функций в степенные ряды. Применение степенных рядов для приближенного вычисления значений функций и приближенного вычисления определенных интегралов.

Несобственные интегралы. Критерий сходимости Коши. Признаки абсолютной и условной сходимости для несобственных интегралов.

Тригонометрические ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье, исследование на поточечную сходимость.

Кратные интегралы. Повторное интегрирование. Замена переменных. Вычисление площадей, объемов.

Криволинейные интегралы первого и второго рода. Формула Грина.

Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Стокса, Остроградского.

Элементы теории поля.

На практических занятиях выделяется время для проведения презентации и обсуждения проектных работ.

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

5.1 Виды самостоятельной работы студентов

❖ Выполнение домашних практических заданий.

5.2 Образовательные материалы для самостоятельной работы студентов, практические задания для проведения текущего контроля.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учеб.
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. СПб.: МИФРИЛ, 1995. - 489 с. (168 экз.)
3. Математический анализ (семестр 1). Электронно-управляемый курс. Кузенков О.А., Рябова Е.А., 2014. <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=243>
4. Исследование дифференцируемых функций одной переменной. Практикум. Составители: Киселева Т.П., Лукьянов В.И., Потёмин Г.В. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. - 37с. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ (№ 1018.15.08) <http://www.unn.ru/books/resources.html>
5. Графики функций: учебно-метод. пособие. Сост. Т.П.Киселева, И.И.Олюнина. - Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. - 43с. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ (№ 979.15.08) http://www.unn.ru/books/met_files/GRAF.pdf
6. Математический анализ (семестр 2). Электронно-управляемый курс. Кузенков О.А., Рябова Е.А., Киселева Т.П., 2014. <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=626>
7. Математический анализ (семестр 3). Электронно-управляемый курс. Кротов Н.В., 2014. <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=289>

5.3 Вопросы для контроля:

1. Понятие окрестности точки.
2. Ограниченные и неограниченные множества, грани множества.
3. Определение числовой последовательности.
4. Бесконечно малые и большие последовательности, связь между ними.
5. Число e .
6. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
7. Критерий Коши существования предела.
8. Определение предела функции в точке по Гейне и Коши.
9. Обобщение понятия предела: односторонние пределы, бесконечно большие функции, пределы на бесконечности.
10. Критерий Коши существования конечного предела функции в точке и на бесконечности.
11. Классификация точек разрыва функции.
12. Теорема о промежуточных значениях. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке и достижении точных граней.
13. Условия непрерывности монотонной функции на отрезке. Теорема о непрерывности обратной функции.
14. Производная и дифференциал функции в точке. Касательная к графику функции в точке.
15. Функции и кривые на плоскости, заданные параметрически.
16. Инвариантность формы первого дифференциала.
17. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
18. Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума.
19. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем.
20. Формула Тейлора. Различные представления остаточного члена формулы Тейлора. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.
21. Нахождение глобального экстремума функции.
22. Приближенные методы нахождения корней уравнений.
23. Первообразная и неопределенный интеграл.
24. Интегрирование простейших дробей.
25. Интегрирование выражений, рационально зависящих от тригонометрических функций.
26. Интегрирование дифференциального бинома.
27. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости.
28. Определение равномерной непрерывности функции.
29. Свойства интеграла с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
30. Понятие кривой на плоскости и в пространстве. Параметризация кривой.
31. Определение длины дуги и спрямляемой кривой.
32. Определение площади плоской фигуры.
33. Площадь поверхности вращения.
34. Функции многих переменных.
35. Кратные и повторные пределы функции.
36. Непрерывность по совокупности переменных и по отдельным переменным.
37. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции на связном множестве.
38. Достаточное условие дифференцируемости.
39. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
40. Формула Тейлора. Формула Лагранжа конечных приращений.
41. Вычисление старших производных неявных функций.
42. Необходимое условие локального экстремума.
43. Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа.
44. Понятие числового ряда.
45. Основные свойства числовых рядов.
46. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов Даламбера, Коши, Раабе. Интегральный признак сходимости.

47. Абсолютная и условная сходимости произвольных числовых рядов.
48. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница сходимости знакопередающих рядов. Признаки Абеля и Дирихле сходимости произвольных рядов.
49. Понятия функциональной последовательности и функционального ряда.
50. Равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Достаточные признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.
51. Функциональные свойства рядов, связанные с равномерной сходимостью.
52. Понятие степенного ряда. Область и радиус сходимости. Вычисление радиуса сходимости: формулы Даламбера, Коши и Коши-Адамара.
53. Ряды Тейлора. Аналитические функции. Интеграл с бесконечными пределами.
54. Интегралы от неограниченных функций.
55. Равномерная сходимость функций по параметру.
56. Ортогональность тригонометрической системы.
57. Поточечная сходимость рядов Фурье.
58. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций на отрезке тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
59. Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье.
60. Интеграл Фурье и преобразование Фурье.
61. Определение и свойства двойного интеграла.
62. Тройные и многократные интегралы.
63. Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве.
64. Криволинейный интеграл первого рода.
65. Криволинейный интеграл второго рода.
66. Ориентация контура. Плоская односвязная область. Интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью формулы Грина.
67. Поверхностный интеграл первого рода. Поверхностный интеграл второго рода. Поверхностно односвязная область. Формула Стокса.
68. Формула Остроградского и ее геометрические приложения.
69. Оператор Гамильтона. Градиент.
70. Дивергенция (расходимость) векторного поля. Ротор. Поле роторов.
71. Циркуляция векторного поля. Поток векторного поля.
72. Формулы Грина, Стокса и Остроградского-Гаусса в векторной форме.
73. Соленоидальные векторные поля. Потенциальные векторные поля.

6. **Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине, включающий:**

6.1. Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Оценка уровня формирования компетенции ОПК-1

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
Знать: З1(ОПК1) – основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой Уметь: У1(ОПК1) – использовать	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных	Плохой уровень формирования компетенции.

<p>базовые знания естественных наук, математики и информатики, Владеть: <i>В1(ОПК1)</i> математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры</p> <p><u>Индикаторы компетенции</u></p>	компетенцией.	0-19 баллов - «Плохо»
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	Знать основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой в с рядом негрубых ошибок. Уметь У1 с рядом негрубых ошибок. Владеть математическим мышлением, математической культурой как частью профессиональной и общечеловеческой культуры	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Знать основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой Уметь У1 с незначительными погрешностями. Владеть большинством основных навыков, демонстрируя их в стандартных ситуациях	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
	Знать основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой с незначительными погрешностями. Уметь У1 без ошибок и погрешностей. Владеть всеми основными навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Знать основные определения и утверждения, предусмотренные компетенцией без ошибок и погрешностей. Уметь У1.	Отличный уровень формирования компетенции

	Владеть всеми навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях.	90-99 баллов «Отлично»
	Знать основной и дополнительный материал без ошибок и погрешностей Уметь У1 Свободно. Владеть всеми навыками, демонстрируя их в стандартных и нестандартных ситуациях.	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

Оценка уровня формирования компетенции ОК-7

Индикаторы компетенции	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания
Уметь У1(ОК7) <i>воспринимать, обобщать и анализировать информацию;</i> Владеть: <i>В1(ОК7) способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.</i> <u>Индикаторы компетенции</u>	Отсутствие знаний материала, отсутствует способность решения стандартных задач, полное отсутствие навыков, предусмотренных компетенцией.	Плохой уровень формирования компетенции. 0-19 баллов - «Плохо»
	Наличие грубых ошибок в основном материале, наличие грубых ошибок при решении стандартных задач, отсутствие навыков, предусмотренных данной компетенцией	Неудовлетворительный уровень формирования компетенции. 20-49 баллов – «неудовлетворительно»
	Уметь У1 с рядом негрубых ошибок. Владеть способностью уточнить, переспросить, задать вопрос на профессиональную тему.	Удовлетворительный уровень формирования компетенции. 50-59 баллов «Удовлетворительно»
	Уметь У1 с незначительными погрешностями. Владеть большинством основных навыков, демонстрируя их в стандартных ситуациях	Хороший уровень формирования компетенции. 60-79 баллов «Хорошо»
	Критерии оценивания (дескрипторы)	Шкала оценивания

	Уметь У1 без ошибок и погрешностей. Владеть всеми основными навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях	Очень хороший уровень формирования компетенции 80-89 баллов «Очень хорошо»
	Уметь У1. Владеть всеми навыками, демонстрируя их в стандартных ситуациях.	Отличный уровень формирования компетенции 90-99 баллов «Отлично»
	Уметь У1 Свободно. Владеть всеми навыками, демонстрируя их в стандартных и нестандартных ситуациях.	Превосходный уровень формирования компетенции 100 баллов «Превосходно»

6.2 Описание шкал оценивания результатов обучения по дисциплине

Оценка	Уровень подготовки
Превосходно	Высокий уровень подготовки, безупречное владение теоретическим материалом, студент демонстрирует творческий подход к решению нестандартных ситуаций. Студент дал полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета, подтверждая теоретический материал практическими примерами из практики. Студент активно работал на практических занятиях. 100 %-ное выполнение контрольных экзаменационных заданий
Отлично	Высокий уровень подготовки с незначительными ошибками. Студент дал полный и развернутый ответ на все теоретические вопросы билета, подтверждает теоретический материал практическими примерами из практики. Студент активно работал на практических занятиях. Выполнение контрольных экзаменационных заданий на 90% и выше
Очень хорошо	Хорошая подготовка. Студент дает ответ на все теоретические вопросы билета, но имеются неточности в определениях

	<p>понятий, процессов и т.п.</p> <p>Студент активно работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 80 до 90%.</p>
Хорошо	<p>В целом хорошая подготовка с заметными ошибками или недочетами. Студент дает полный ответ на все теоретические вопросы билета, но имеются неточности в определениях понятий, процессов и т.п. Допускаются ошибки при ответах на дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора. Студент работал на практических занятиях.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 70 до 80%.</p>
Удовлетворительно	<p>Минимально достаточный уровень подготовки. Студент показывает минимальный уровень теоретических знаний, делает существенные ошибки при характеристике нормативно-правовой базы валютного регулирования, но при ответах на наводящие вопросы, может правильно сориентироваться и в общих чертах дать правильный ответ. Студент посещал практические занятия.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий от 50 до 70%.</p>
Неудовлетворительно	<p>Подготовка недостаточная и требует дополнительного изучения материала. Студент дает ошибочные ответы, как на теоретические вопросы билета, так и на наводящие и дополнительные вопросы экзаменатора. Студент пропустил большую часть практических занятий.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий до 50%.</p>
Плохо	<p>Подготовка абсолютно недостаточная. Студент не отвечает на поставленные вопросы. Студент отсутствовал на большинстве лекций и практических занятий.</p> <p>Выполнение контрольных экзаменационных заданий менее 20 %.</p>

6.3 Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций

Для оценивания результатов обучения в виде знаний используются следующие процедуры и технологии:

- тестирование;
- индивидуальное собеседование,
- письменные ответы на вопросы.

Для оценивания результатов обучения в виде умений и владений используются следующие процедуры и технологии:

- практические контрольные задания (далее – ПКЗ), включающих одну или несколько задач (вопросов) в виде краткой формулировки действий (комплекса действий), которые следует выполнить, или описание результата, который нужно получить.

По сложности ПКЗ разделяются на простые и комплексные задания.

Простые ПКЗ предполагают решение в одно или два действия. К ним можно отнести: простые ситуационные задачи с коротким ответом или простым действием; несложные задания по выполнению конкретных действий. Простые задания применяются для оценки умений. Комплексные задания требуют многоходовых решений как в типичной, так и в нестандартной ситуациях. Это задания в открытой форме, требующие поэтапного решения и развернутого ответа, в т.ч. задания на индивидуальное или коллективное выполнение проектов, на выполнение практических домашних практических работ. Комплексные практические задания применяются для оценки владений.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции.

- ❖ Домашнее практическое задания для оценивания результатов обучения в виде умений У1 и владений В1 формирования ОПК-1.

Вариант 1.

1. Доказать по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1-2n} = -\frac{1}{2}$.
2. Найти пределы последовательностей a_n , обосновывая свои действия:

(a) $a_n = \frac{(n+1)^5 + (n-1)^5 - (2n+3)^5}{n^2 + (4-n)^5};$

(b) $a_n = \frac{n \sqrt[3]{6n} - \sqrt[4]{81n^6 - 1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}};$

(c) $a_n = \sqrt{n^6 + 8}(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 + 1});$

(d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{4^n - 2^n}}.$

3. Пользуясь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$
4. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}.$

- ❖ Примеры вопросы к тесту для оценивания результатов обучения в виде знаний формирования ОПК-1.

Вопрос 1

Тип: множественный выбор

Формулировка вопроса:

К какому значению приближаются члены последовательности $a_n = \frac{n-1}{n}$ при увеличении номера n ?

Варианты ответов:

- 1
- 2
- 0
- 1/2

Вопрос 2

Тип: одиночный выбор

Формулировка вопроса:

Начиная с какого номера, все члены последовательности $a_n = \frac{2n+1}{n}$ будут совпадать с числом 2 с точностью не меньше 0,01?

Варианты ответов:

- $n=10$
 - $n=100$
 - $n=50$
 - $n=101$
 - $n=2$
 - $n=1001$
- ❖ Экзаменационный билет на оценивание $3I(ОПК1)$, $У1(ОПК1)$

Институт ИТММ Нижегородского государственного университета им Н.И.Лобачевского

Кафедра ДУМЧА Дисциплина Математический анализ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Определение предела последовательности. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$$

2. Определение производной. Вывести формулу производной для функций

$$y=x^a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad y=\sin x.$$

Зав. кафедрой _____

Экзаменатор _____

- ❖ Пример на проверку умения проводить доказательства математических утверждений не аналогичных ранее изученным, но тесно примыкающих к ним;

Доказать, что если $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1$, то $\{x_n\}$ – сходящаяся.

- ❖ Пример на проверку умения решать математические задачи, которые требуют некоторой оригинальности мышления

Существует ли $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$, где n – натуральное число. Ответ обосновать.

6.5 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания.

Положение о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ННГУ от 13.02.2014.

http://www.unn.ru/pages/general/norm-acts/attest_stud%202014.pdf

Положение о фонде оценочных средств, утвержденное приказом ректора ННГУ от 10.06.2015 №247-ОД.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. КУДРЯВЦЕВ Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. Учебник. - 3-е изд., перераб. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 400 с. (56 экз)
2. КУДРЯВЦЕВ Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ: Учебник. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 424 с. (58 экз.)
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учеб. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. СПб.: МИФРИЛ, 1995. - 489 с. (168 экз.)

б) дополнительная литература:

1. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Курс математического анализа. В 2-х томах. Наука, 1983. Т.1 464 с.; Т.2 448 с. <https://e.lanbook.com/book/2270#authors>
2. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах). - М.: Физматлит, 2003. т.1 - 680с.; т.2 - 864с.; т.3 - 728с. <https://e.lanbook.com/book/409#authors>
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения : [учеб. пособие для втузов]. - М.: Наука, 1967. - 368 с. (16 экз. + 15 экз. другие года издания)
4. Исследование дифференцируемых функций одной переменной. Практикум. Составители: Киселева Т.П., Лукьянов В.И., Потёмин Г.В. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. - 37с. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ (№ 1018.15.08) <http://www.unn.ru/books/resources.html>

5. Графики функций: учебно-метод. пособие. Сост. Т.П.Киселева, И.И.Олюнина. - Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. - 43с. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ (№ 979.15.08) http://www.unn.ru/books/met_files/GRAF.pdf

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы

<http://www.unn.ru/books/resources.html>

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>

Математический анализ (семестр 1). Электронно-управляемый курс. Кузенков О.А., Рябова Е.А., 2014. <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=243>

Математический анализ (семестр 2). Электронно-управляемый курс. Кузенков О.А., Рябова Е.А., Киселева Т.П., 2014. <https://e-learning.unn.ru/course/view.php?id=626>

Математический анализ (семестр 3). Электронно-управляемый курс. Кротов Н.В., 2014. <https://e-learning.unn.ru/enrol/index.php?id=289>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Имеются в наличии учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы, оснащенные компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет».

Учебная и научная литература, учебно-методические материалы, представленные в библиотечном фонде, в электронных библиотеках и на кафедре численного и функционального анализа.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ННГУ по направлению

020302 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Профиль Инженерия программного обеспечения

Авторы к.ф.-м.н., доцент Лукьянов В.И., к.ф.-м.н., доцент Рябова Е.А.

Программа одобрена на заседании кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

от _ протокол № __.

Заведующий кафедрой _____ Д.В. Баландин

Программа одобрена методической комиссией Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

от 20 июня 2018 года, протокол № 10